

# Numerische Simulation wirbelbehafteter kavitierender Strömungen

Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau der  
Universität Duisburg-Essen  
zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTOR-INGENIEUR

genehmigte Dissertation

von

Thomas Hachmann  
aus  
Arnsberg

Referent: Prof. Dr.-Ing. Moustafa Abdel-Maksoud  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Andreas Kempf

Tag der mündlichen Prüfung: 7. Mai 2014

---

## Vorwort

Die nachfolgende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Schiffstechnik und Transportsysteme der Universität Duisburg-Essen und am Institut für Fluidodynamik und Schiffstheorie der Technischen Universität Hamburg-Harburg entstanden. Bedanken möchte ich mich auch bei der Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG) für die Beauftragung des Forschungsprojekts Simulation von Kavitationseffekten in Wirbelströmungen, welches ich zusammen mit Dr. Udo Lantermann bearbeiten durfte.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Moustafa Abdel-Maksoud, für die zahlreichen wissenschaftlichen Diskussionen welche maßgebend zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Ein weiterer Dank geht an Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Hänel für die ebenfalls gewinnbringenden wissenschaftlichen Diskussionen und die Begleitung durch das von der DFG geförderten Projekts. Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Kempf für die Übernahme des Koreferats bedanken.

Ein Dank geht ebenfalls an meine Kollegen für die gute Zusammenarbeit und weiterbringenden Diskussionen, vor allem aber an Sven-Brian Müller mit dem ich lange Jahre ein Büro geteilt habe.

Der größte Dank geht natürlich an meine Familie und meine Frau Eveline, sowie an meine Eltern.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>x</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theorie wirbelbehafteter kavitierender Strömungen</b>	<b>3</b>
2.1 Wirbel und Wirbelströmungen in der Natur . . . . .	4
2.2 Kavitation und Kavitationsarten . . . . .	5
2.3 Kavitation im Schiffbau . . . . .	6
2.4 Aufgabenstellung und Zielsetzung . . . . .	8
<b>3 Modellierung kavitierender Strömungen</b>	<b>10</b>
3.1 Erhaltungsgleichungen . . . . .	10
3.2 Diskretisierung . . . . .	11
3.2.1 Finite-Volumen . . . . .	11
3.2.2 Fehlerarten . . . . .	11
3.2.3 Numerische Diffusion . . . . .	13
3.3 Turbulenzmodellierung . . . . .	19
3.3.1 Direkte numerische Simulation . . . . .	20
3.3.2 Statistische Turbulenzmodelle . . . . .	20
3.3.3 Grobstruktursimulation . . . . .	28
3.4 Zwei-Phasen-Strömung . . . . .	28
3.4.1 Interfaceverfolgungsmethoden . . . . .	29
3.4.2 Interfaceerfassungsmethoden . . . . .	29
3.5 Kavitationsmodellierung . . . . .	32
3.5.1 Singhalmodell . . . . .	34
3.5.2 Sauermodell . . . . .	35
3.5.3 Zwartmodell . . . . .	36
<b>4 Numerische Verfahren</b>	<b>38</b>
4.1 Verwendete Lösungsverfahren . . . . .	38
4.1.1 MOUSE . . . . .	38
4.1.2 FreSCo <sup>+</sup> . . . . .	38

4.2	Rechengitter . . . . .	39
4.2.1	Gitterarten . . . . .	40
4.2.2	Gitterstrukturen . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Wirbeldetektion in Kombination mit Vorticity Confinement</b>	<b>45</b>
5.1	Vorticity Confinement . . . . .	45
5.1.1	Grundlagen des Wirbeltransports . . . . .	45
5.1.2	Entwicklung des Vorticity Confinement . . . . .	46
5.2	Wirbeldetektion . . . . .	50
5.2.1	Wirbeldetektionsalgorithmen . . . . .	50
5.2.2	Helizitäts-Verfahren . . . . .	50
5.2.3	Q-Verfahren . . . . .	51
5.2.4	$\Delta$ -Verfahren . . . . .	51
5.2.5	$\Lambda^2$ -Verfahren . . . . .	52
5.2.6	Prädiktor-Korrektor Verfahren . . . . .	52
5.3	Vorticity Confinement und Wirbeldetektion . . . . .	53
5.3.1	Prädiktor-Korrektor-Verfahren . . . . .	54
5.3.2	Vortfind-Verfahren . . . . .	57
5.3.3	Wirbellinie und Vorticity Confinement . . . . .	59
5.3.4	Implementierungsdetails . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Anwendungsfälle</b>	<b>64</b>
6.1	Einfache Wirbel . . . . .	64
6.1.1	Wirbelmodelle . . . . .	64
6.1.2	Geometrie des Rechengebiets und Randbedingungen . . . . .	67
6.1.3	Rechengitter . . . . .	68
6.1.4	Vergleich der Berechnungen ohne Vorticity Confinement . . . . .	70
6.1.5	Berechnungen mit Vorticity Confinement . . . . .	74
6.2	Spitzenwirbel eines Tragflügels . . . . .	77
6.2.1	Rechengitter . . . . .	78
6.2.2	Randbedingungen . . . . .	82
6.2.3	Ergebnisse . . . . .	83
6.3	Propeller . . . . .	91
6.3.1	INSEAN E779a . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>107</b>
	<b>Literatur</b>	<b>109</b>



<b>A</b>	<b>115</b>
A.1 Eulersche Winkel . . . . .	115

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Phasendiagramm von Wasser . . . . .	5
2.2	MS Turbinia [Bildquelle: wikipedia, Urheber unbekannt] . . . . .	7
2.3	Kavitierendes Wirbelsystem [1] . . . . .	7
2.4	Kavitationsarten am Propeller [Bildquelle: boatdesign.net, Urheber unbekannt] . . . . .	8
3.1	Approximation von $\phi$ mit dem CDS-Verfahren [40] . . . . .	14
3.2	Approximation von $\phi$ mit dem UDS-Verfahren [40] . . . . .	17
3.3	Approximation von $\phi$ mit dem QUICK-Verfahren [40] . . . . .	19
3.4	Zeitmittelung für eine statisch stationäre Strömung (links) und eine statisch instationäre Strömung (rechts) [13] . . . . .	21
3.5	Beschreibung der Grenzfläche mit der Marker-and-Cell-Methode . . . . .	30
3.6	Beschreibung der Grenzfläche mit einer Level-Set-Funktion . . . . .	31
3.7	Beschreibung der Grenzfläche mit der Volume-of-Fluid-Methode . . . . .	31
4.1	Randangepasstes Gitter (links) und kartesisches Gitter ohne Randanpassung (rechts) . . . . .	40
4.2	Randangepasstes unstrukturiertes Tetraeder-Gitter . . . . .	41
4.3	Strukturiertes kartesisches Hexaeder-Gitter (links) und strukturiertes krummliniges Hexaeder-Gitter (rechts) . . . . .	42
4.4	Blockstrukturiertes Hexaeder-Gitter . . . . .	43
4.5	Hierarchisch strukturiertes Hexaeder-Gitter . . . . .	44
5.1	Vorticity Confinement - schematische Darstellung . . . . .	47
5.2	Prädiktor-Schritt . . . . .	55
5.3	Korrektor-Schritt . . . . .	56
5.4	Korrektor-Schritt mit Wirbelsplittung . . . . .	57
5.5	Vortfind-Verfahren [36] . . . . .	59
5.6	Glättung der Wirbelbegrenzung für das Vorticity Confinement Verfahren . . . . .	60
5.7	Ablauf einer Berechnung . . . . .	63
6.1	Tangentialgeschwindigkeitsverlauf Burgerswirbel, UDS (Upwind Differencing Scheme) . . . . .	64
6.2	Tangentialgeschwindigkeitsverlauf Burgerswirbel, CDS (Central Differencing Scheme) . . . . .	64
6.3	Tangentialgeschwindigkeitsverlauf Burgerswirbel, QUICK (Quadratic Upwind Interpolation Scheme for Convective Kinematics) . . . . .	65
6.4	Druckverlauf Burgerswirbel, UDS (Upwind Differencing Scheme) . . . . .	65
6.5	Druckverlauf Burgerswirbel, CDS (Central Differencing Scheme) . . . . .	65

6.6	Druckverlauf Burgerswirbel, QUICK (Quadratic Upwind Interpolation Scheme for Convective Kinematics) . . . . .	65
6.7	Gitternetztopologie . . . . .	68
6.8	Druckverlauf im Wirbelkernzentrum bei unterschiedlichen Netzauflösungen .	70
6.9	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen, $\frac{x}{L} = 0,0$ . . . . .	71
6.10	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen, $\frac{x}{L} = 0,1$ . . . . .	71
6.11	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen, $\frac{x}{L} = 0,2$ . . . . .	72
6.12	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen, $\frac{x}{L} = 0,5$ . . . . .	72
6.13	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Netze gleicher Zellanzahl mit unterschiedlich gestreckten Zellen, $\frac{x}{L} = 0,1$ . . . . .	73
6.14	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Netze gleicher Zellanzahl mit unterschiedlich gestreckten Zellen, $\frac{x}{L} = 0,2$ . . . . .	73
6.15	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Netze gleicher Zellanzahl mit unterschiedlich gestreckten Zellen, $\frac{x}{L} = 0,5$ . . . . .	74
6.16	Tangentialgeschwindigkeiten und Bereich des Vorticity Confinements . . . .	75
6.17	Druckverlauf und Bereich des Vorticity Confinements . . . . .	75
6.18	Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Berechnung mit Vorticity Confinement und Referenzberechnungen, $\frac{x}{L} = 0,5$ . . . . .	76
6.19	Druckverlauf im Wirbelkernzentrum für Berechnung mit Vorticity Confinement und Referenzberechnungen, $\frac{x}{L} = 0,5$ . . . . .	76
6.20	Wirbelkernlinie und Isofläche des Drucks für Berechnung mit zwei Burgerswirbeln . . . . .	77
6.21	Wirbelkernlinie und Druckverlauf in mittlerer Ebene für Berechnung mit zwei Burgerswirbeln . . . . .	77
6.22	Oberflächennetz des NACA16020-Tragflügels . . . . .	79
6.23	Rechennetz des NACA16020-Tragflügels, Stufe I, grob . . . . .	79
6.24	Detail des Rechennetzes des NACA16020-Tragflügels, Stufe I, grob . . . . .	80
6.25	Rechennetz des NACA16020-Tragflügels, Stufe II, mittel . . . . .	80
6.26	Detail des Rechennetzes des NACA16020-Tragflügels, Stufe II, mittel . . . .	81
6.27	Rechennetz des NACA16020-Tragflügels, Stufe III, fein . . . . .	81
6.28	Detail des Rechennetzes des NACA16020-Tragflügels, Stufe III, fein . . . . .	82
6.29	Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche, $\frac{x}{c_{max}} = 0,75$ . . . . .	84

6.30	Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche, $\frac{x}{c_{max}} = 1,0$ . . . . .	84
6.31	Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche, $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$ . . . . .	85
6.32	Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche, $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$ . . . . .	86
6.33	Isofläche für $p=70000$ Pa, grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels . . . . .	87
6.34	Isofläche für $p=70000$ Pa, mittlere Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels . . . . .	87
6.35	Isofläche für $p=70000$ Pa, feine Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels . . . . .	87
6.36	Isofläche für $p=70000$ Pa, $\varepsilon = 0,05$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels . . . . .	88
6.37	Isofläche für $p=70000$ Pa, $\varepsilon = 0,1$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels . . . . .	88
6.38	Tangentialgeschwindigkeitsprofile stromabwärts der Tragfläche für Berechnungen mit Vorticity Confinement, $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$ . . . . .	89
6.39	Tangentialgeschwindigkeitsprofile stromabwärts der Tragfläche für Berechnungen mit Vorticity Confinement, $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$ . . . . .	89
6.40	Dampfdruckgebiet, $\alpha = 0,01$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels . . . . .	90
6.41	Dampfdruckgebiet, $\alpha = 0,01$ , $\varepsilon = 0,1$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels . . . . .	90
6.42	Propellerfreifahrt diagramm . . . . .	95
6.43	Geometrie des Propellers E779a [7] . . . . .	97
6.44	Geometrie des Propellers E779a, Ansicht in x-Richtung . . . . .	97
6.45	Geometrie des Propellers E779a, Ansicht in y-Richtung . . . . .	98
6.46	Oberflächennetz des Propellers E779a . . . . .	98
6.47	Rechennetz des Propellers E779a, Ansicht in x-Richtung . . . . .	99
6.48	Rechennetz des Propellers E779a, Ansicht in y-Richtung . . . . .	99
6.49	Rechennetz des Propellers E779a, Detailansicht in y-Richtung . . . . .	100
6.50	Dampfdruckgebiet, Ausgangsberechnung . . . . .	100
6.51	Dampfdruckgebiet, Berechnung mit Vorticity Confinement, $\varepsilon = 1.0$ . . . . .	101
6.52	Druckverteilung auf der Druckseite des E779a . . . . .	101
6.53	Druckverteilung auf der Saugseite des E779a . . . . .	102
6.54	Punkte der Wirbelkernlinien . . . . .	102

6.55 Punkte der Wirbelkernlinien, Isometrie . . . . .	103
6.56 Isofläche für $\gamma = 0,01$ . . . . .	103
6.57 Isofläche für $\gamma = 0,01$ , Isometrie . . . . .	104
6.58 Isofläche des Drucks $p$ der Berechnung ohne Vorticity Confinement . . . . .	104
6.59 Isofläche des Drucks $p$ der Berechnung mit Vorticity Confinement, $\varepsilon = 1,0$ . . . . .	105
6.60 Kavitationsblasenverteilung, Euler-Lagrange Kavitationsmodell, Ausgangsbe- rechnung . . . . .	105
6.61 Kavitationsblasenverteilung, Euler-Lagrange Kavitationsmodell, Berechnung mit Vorticity Confinement, $\varepsilon = 1.0$ . . . . .	106

## Tabellenverzeichnis

2.1	Wirbel in der Natur . . . . .	4
3.1	Modellkonstanten des Standard-k- $\epsilon$ -Modells . . . . .	24
3.2	Modellkonstanten des Wilcox-k- $\omega$ -Modells . . . . .	25
3.3	Modellkonstanten des k- $\omega$ -SST-Modells . . . . .	27
3.4	Modellkonstanten des Sauermodells . . . . .	36
3.5	Modellkonstanten des Zwartmodells . . . . .	37
6.1	Rechengitter . . . . .	69
6.2	Rechengitter-Tragfluegel . . . . .	82
6.3	Rechengitter . . . . .	94
6.4	Schub- und Drehmomentenbeiwerte für J=0,65 . . . . .	95

## Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole	Beschreibung	Einheit
$A$	Oberfläche	$[m^2]$
$a$	Grenzradius Wirbelmodell	$[m]$
$c_L$	Auftriebsbeiwert	$[-]$
$C_\mu$	Modellkonstante des k- $\epsilon$ -Modells	$[-]$
$C_{\epsilon 1}$	Modellkonstante des k- $\epsilon$ -Modells	$[-]$
$C_{\epsilon 2}$	Modellkonstante des k- $\epsilon$ -Modells	$[-]$
$D$	Propellerdurchmesser	$[m]$
$d_{max}$	Zellabstand	$[m]$
$F$	Kraft	$[N], [\frac{kg \cdot m}{s^2}]$
$H$	Term höherer Ordnung	$[-]$
$H_n$	Helizität	$[-]$
$h$	charakteristische Länge	$[m]$
$k$	turbulente kinetische Energie	$[\frac{m^2}{s^2}]$
$\mathbf{J}$	Tensor des Geschwindigkeitsgradienten	$[\frac{1}{s}]$
$K_K$	Modellkonstante des Singhal- und Zwartmodells	$[-]$
$K_V$	Modellkonstante des Singhal- und Zwartmodells	$[-]$
$l, L$	Länge	$[m]$
$m$	Masse	$[kg]$
$\dot{m}$	Massenstrom	$[\frac{kg}{s}]$
$N$	Anzahl	$[-]$
$\hat{n}$	Richtungsvektor	$[-]$
$\vec{n}$	Normalenvektor	$[-]$
$n_0$	Modellkonstante des Sauermodells	$[-]$
$q$	Länge im Vortfind-Verfahren	$[m]$
$p$	Druck	$[Pa], [\frac{kg}{m \cdot s^2}]$
$p$	Länge im Vortfind-Verfahren	$[m]$
$R$	Blasenradius	$[m]$
$R_b$	Modellkonstante des Sauer- und Zwartmodells	$[-]$
$R_0$	Modellkonstante des Sauermodells	$[-]$
$R_K$	Quellterm für die Kondensation	$[-]$
$R_V$	Quellterm für die Verdampfung	$[-]$
$R_{max}$	Modellkonstante des Sauermodells	$[-]$
$r_{nuc}$	Modellkonstante des Zwartmodells	$[-]$
$r$	Radius / Länge im Vortfind-Verfahren	$[m]$

$r_v$	Wirbelkernradius	[m]
$Re$	Reynoldszahl	[-]
$Re_h$	lokale Reynoldszahl	[-]
$Re_{\tilde{\omega},h}$	lokale Reynoldszahl	[-]
$Re_{krit}$	kritische Reynoldszahl	[-]
$S$	Oberfläche	[m <sup>2</sup> ]
$S$	Deformationsrate	[-]
$S$	symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten	[ $\frac{1}{s}$ ]
$\vec{s}$	Beschleunigungsterm im Vorticity Confinement	[ $\frac{m}{s^2}$ ]
$S_{ij}$	Tensor der Deformationsrate	[-]
$t, T$	Zeit	[s]
$\mathbf{T}$	Spannungstensor	[Pa], [ $\frac{kg}{m \cdot s^2}$ ]
$\vec{u}$	Geschwindigkeit	[ $\frac{m}{s}$ ]
$x, y, z$	Koordinaten	[m]
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	[ $\frac{m}{s}$ ]
$V$	Volumen	[m <sup>3</sup> ]
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand	[-]
$Z$	Flügelzahl	[-]

Griechische Symbole	Beschreibung	Einheit
$\alpha$	Volumenanteil	[-]
$\alpha$	Modellkonstante des Wilcox k- $\omega$ -Modells	[-]
$\alpha_1$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	[-]
$\alpha_2$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	[-]
$\beta$	Richtungsparameter	[-]
$\beta$	Modellkonstante des Wilcox k- $\omega$ -Modells	[-]
$\beta^*$	Modellkonstante des Wilcox k- $\omega$ -Modells	[-]
$\beta_1$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	[-]
$\beta_2$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	[-]
$\beta^*$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	[-]
$\Delta$	Diskriminante	[-]
$\varepsilon$	Dissipationsrate	[ $\frac{m^2}{s^3}$ ]
$\varepsilon$	Parameter im Vorticity Confinement	[ $\frac{m}{s}$ ], [-]
$\varepsilon_h$	Parameter im Vorticity Confinement	[ $\frac{1}{s}$ ]
$\eta$	dynamische Viskosität	[Pa · s, $\frac{kg}{m \cdot s}$ ]
$\Gamma$	Fehlerabschätzung	[-]



$\Gamma$	Zirkulation	$[\frac{m^2}{s}]$
$\delta_{ij}$	Kroneckerdelta	$[-]$
$\lambda$	Interpolationsfaktor	$[-]$
$\mu_t$	Wirbelviskosität	$[\frac{kg}{ms}]$
$\nu$	kinematische Viskosität	$[\frac{m^2}{s}]$
$\rho$	Dichte	$[\frac{kg}{m^3}]$
$\sigma$	Kavitationszahl	$[-]$
$\sigma$	Modellkonstante des Wilcox k- $\omega$ -Modells	$[-]$
$\sigma^*$	Modellkonstante des Wilcox k- $\omega$ -Modells	$[-]$
$\sigma_e$	Modellkonstante des k- $\varepsilon$ -Modells	$[-]$
$\sigma_k$	Modellkonstante des k- $\varepsilon$ -Modells	$[-]$
$\sigma_{k1}$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	$[-]$
$\sigma_{k2}$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	$[-]$
$\sigma_{\omega 1}$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	$[-]$
$\sigma_{\omega 2}$	Modellkonstante des k- $\omega$ -SST-Modells	$[-]$
$\phi$	beliebige Erhaltungseigenschaft	$[-]$
$\omega$	charakteristische Frequenz der energiedissipierenden Wirbel	$[\frac{1}{s}]$
$\vec{\omega}$	Wirbelstärke	$[\frac{1}{s}]$
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$[\frac{rad}{s}]$
$\Omega$	antisymmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten	$[\frac{1}{s}]$

<b>Indizes</b>	<b>Beschreibung</b>
$x, y, z$	Koordinatenrichtungen
$i, j, k$	Gitterpositionen
$e, E, P$	Bezeichnung der Lage eines Kontrollvolumens
$ave$	gemittelt
$b, B$	Blase
$num$	numerisch
$ref$	Referenz
$t, tan$	tangential
$sat$	Sättigungszustand
$v$	gasförmig
$l$	flüssig

# 1 Einleitung

Die Umströmung von Schiffen ist charakterisiert durch ein nichtlineares Strömungsfeld. Zur Auslegung des Propulsionsorgans bzw. der Propulsionsorgane ist die Kenntnis des Schiffswiderstands und die Kenntnis des Nachstromfeldes von besonderer Bedeutung. Die Vorhersage des Strömungsfelds ist u.a. aufgrund weitreichender Forschung im Bereich der Turbulenzmodellierung in ausreichender Präzision möglich, Werte für den Strömungswiderstand können ebenfalls in ausreichender Genauigkeit vorhergesagt werden. Betrachtet man das Propulsionsorgan, so stellen sich hier die komplexesten Strömungsvorgänge am Schiff ein. Neben einer starken Wirbelbildung ist dieses Bauteil auch durch eine hohe Kavitationsanfälligkeit gekennzeichnet. Während bereits gute Methoden zur Simulation von Schichtkavitation vorliegen, ist die Erfassung der Wirbelkavitation mit numerischen Methoden ohne großen Rechenaufwand nur unzureichend möglich. Dieses liegt im Wesentlichen an der nicht ausreichenden Abbildung des Wirbels bedingt durch eine zu geringe örtliche Diskretisierung zur Anwendung der numerischen Lösungsmethode. Neben der Verringerung des Wirkungsgrads eines kavitierenden Propellers sind erhöhte Druckschwankungen und Erosionserscheinungen ungewollte Nebeneffekte der Kavitation. Auch hier kann aufgrund der hohen Dissipation der Wirbel in der numerischen Simulation keine zuverlässige Aussage getroffen werden, ob der Wirbel z.B. noch auf Anhänge auftrifft oder die Kavitation schon vor dem Auftreffen abgebaut wurde.

Zielsetzung der Arbeit ist die Weiterentwicklung von numerischen Algorithmen, welche der hohen Wirbeldissipation in der numerischen Lösung entgegenwirken um eine genauere Prognose speziell im Bereich der Spitzenwirbelkavitation von Propellern zu erreichen. Vergleicht man die Ergebnisse von numerischen Propellerberechnungen mit kavitierenden Spitzenwirbeln mit den Ergebnissen von Modellversuchen im Kavitationstank, so sind deutliche Unterschiede zu erkennen. Während die Spitzenwirbel im Kavitationstank über mehrere Umdrehungen spiralförmig erkennbar sind, enden diese in der numerischen Lösung in der Regel bereits nach weniger als einer Umdrehung. Verglichen werden hier die Ergebnisse aus Modellversuchen mit den Ergebnissen numerischer Lösungen mit einer in der Industrie gängigen Diskretisierung. Eine ausreichende Netzauflösung kann nur durch den Einsatz von Großrechnern realisiert werden. Grundsätzlich entsteht ein Großteil der Wirbeldissipation aufgrund geringer Netzauflösung. Eine Erhöhung dieser ist jedoch oftmals aufgrund der in der Praxis vorhandenen begrenzten Hardwaremöglichkeiten keine adäquate Lösung. Deshalb ist ein großer Bedarf an Rechenmethoden vorhanden, die ohne eine Erhöhung der Rechnerleistung einsetzbar sind.

Kapitel 2 beschreibt die unterschiedlichen Arten von wirbelbehafteten kavitierenden Strömungen. Zunächst werden natürliche wirbelbehaftete Strömungen aufgezeigt, welche unseren All-

tag begleiten, unterstützen und zum Teil auch erschweren. Es folgen Beschreibungen der unterschiedlichen Kavitationsarten im Allgemeinen und im Anschluss daran eine Beschreibung von Kavitation bei der Umströmung von Schiffen und deren Propulsionsorganen.

Kapitel 3 behandelt die Modellierung kavitierender Strömungen. Angefangen bei den Grundgleichungen der numerischen Strömungsmechanik werden Unterkapitel abgehandelt, welche zur erfolgreichen Modellierung kavitierender Strömungen notwendig sind. Hierbei handelt es sich insbesondere um die Modellierung von turbulenten Strömungen und die Modellierung von Strömungen mit mehreren Phasen. Abschließend werden Kavitationsmodelle nach dem Euler-Euler-Ansatz beschrieben.

Diese Arbeit entstand zum einen am Institut für Schiffstechnik und Transportsysteme der Universität Duisburg-Essen und zum anderen am Institut für Fluidodynamik und Schiffstheorie der Technischen Universität Hamburg-Harburg. Da an beiden Instituten unterschiedliche Codes zur numerischen Berechnung von Strömungsvorgängen verwendet wurden, wird in Kapitel 4 eine Kurzzusammenfassung der jeweiligen Codes gegeben, gefolgt von der Beschreibung unterschiedlicher Gittergenerierungsmethoden. In dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Methoden der Gittergenerierung verwendet.

Kapitel 5 behandelt den Kern dieser Arbeit. Das Aufrechterhalten von Wirbelströmungen mittels zusätzlicher antidissipativ wirkender Kräfte in das numerische Lösungssystem wird als Vorticity Confinement bezeichnet. Der aktuelle Stand der Forschung wird ebenso beschrieben wie die weitere Entwicklung in diesem Bereich um eine Anwendung auf komplexe Strömungen möglich zu machen.

Anwendungsbeispiele folgen in Kapitel 6. Angefangen bei einfachen künstlichen Wirbeln folgt eine Behandlung von Spitzenwirbeln eines elliptischen Tragflügels. Abschließend werden Ergebnisse eines freifahrenden Propellers mit kavitierenden Spitzenwirbeln gezeigt.

Im abschließenden Kapitel 7 dieser Arbeit folgt die Zusammenfassung der Methoden und erzielten Ergebnisse und ein Ausblick auf weiterführende Entwicklungen.

## 2 Theorie wirbelbehafteter kavitierender Strömungen

Kavitierende Strömungen sind gerade im Bereich der Kraft- und Arbeitsmaschinen eine häufig anzutreffende Strömungsform mit zumeist nicht gewünschten Begleiterscheinungen. Unter Kavitation versteht man das Anwachsen und Auflösen von Hohlräumen in Strömungen. Vereinfacht kann man Kavitation wie folgt beschreiben: Sinkt der statische Druck unter den Dampfdruck, so bilden sich Dampfblasen. Bei Anstieg des statischen Drucks kondensieren diese wiederum und fallen implosionsartig in sich zusammen.

Diese Aussage ist jedoch insofern vereinfacht, dass der Kavitationsbeginn nur in idealen Flüssigkeiten mit unterschreiten des Dampfdrucks einsetzt. In der Realität spielen andere Faktoren, wie z. B. die Wasserqualität, eine entscheidende Rolle.

Kavitation an Kraft- und Arbeitsmaschinenkomponenten bringt zumeist negative Eigenschaften mit sich. Die zumeist wichtigste negative Eigenschaft der Kavitation ist der implosionsartige Zusammenfall der Kavitationsblasen bzw. Hohlräume und die damit verbundene Zerstörung des Bauteils. Ein sich formender Microjet trifft mit hoher Geschwindigkeit auf das Bauteil und sorgt hier für eine lokale Zerstörung. Ein weiterer entscheidender negativer Faktor ist der sich einstellende Wirkungsgradverlust. Die Implosion der Kavitationsblasen führt zudem zu Druckschwankungen und zu einer erhöhten Schallabstrahlung. Aufgrund der Unregelmäßigkeit von Kavitationserscheinungen entstehen ebenso Vibrationen.

Die Kavitation bzw. der Kavitationsbeginn ist ein wichtiger Einflussfaktor bei dem Entwurf und der Auslegung von Schiffspropellern. Hochbelastete Schiffspropeller werden nahe der Kavitationsgrenze betrieben. Tritt trotzdem Kavitation auf, so kann diese nur durch Verringerung der Drehzahl vermieden werden. Folglich führt diese Maßnahme zu einer Drosselung der Fahrtgeschwindigkeit. Bei Unterseebooten kann bei gleichbleibender Propellerdrehzahl die Tauchtiefe erhöht werden. Diese Maßnahme führt zur Erhöhung des statischen Drucks und somit zur Erhöhung des Druckniveaus am Propeller.

Trotz der zumeist negativen Eigenschaften von Kavitation gibt es auch Anwendungen die sich dieser Eigenschaft bedienen. So kommen, speziell bei schnellen Schiffen, superkavitierende Propeller zum Einsatz. Durch die verringerte Dichte im Bereich der Kavitation auf der Saugseite verringert sich der Reibungswiderstand aufgrund der nicht mehr mit Flüssigkeit benetzten Oberfläche. Der Großteil des Schubs wird hier im Vergleich zum herkömmlichen Propeller nur noch auf der Druckseite erzeugt. Aufgrund der fehlenden Reibung auf der Saugseite ist

die Absenkung des Wirkungsgrads in vielen Fällen sehr gering.

Die Eigenschaft des verminderten Reibungswiderstands durch Kavitation wird ebenfalls bei superkavitierenden Torpedos ausgenutzt. Aufgrund seiner Form und der entsprechend hohen Geschwindigkeit bildet sich um den Torpedo ein lokales, annähernd stationäres, Kavitationsgebiet, welches mit der Fortschrittsgeschwindigkeit des Torpedos mitwandert. Bei gleicher Leistung kann aufgrund des geringeren Reibungswiderstands eine deutlich höhere Geschwindigkeit als beim herkömmlichen Torpedo erreicht werden.

Außerhalb der Schiffstechnik wird Kavitation z.B. zur Reinigung von Oberflächen in Ultraschallbädern eingesetzt. Künstlich erzeugte Mikroblasen implodieren und treffen auf die zu reinigende Oberfläche.

### 2.1 Wirbel und Wirbelströmungen in der Natur

Die Simulation von Wirbelströmungen stellt einen wichtigen Bestandteil dieser Arbeit dar. Von Wirbeln bzw. Wirbelströmungen spricht man bei Strömungen, welche einen kreisförmigen, rotierenden Verlauf zeigen. In Wirbeln jeglicher Art und Größe wird Energie dissipiert. Kinetische Energie wird zumeist in Wärmeenergie umgewandelt. Wirbelströmungen sind in der Natur in beliebigen Größenskalen anzutreffen, angefangen von den kleinsten Turbulenzwirbeln bis hin zu Galaxien. Eine kurze Übersicht über alltägliche Wirbel und eine grobe Abschätzung der Wirbelgrößen zeigt die folgende Tabelle.

Tabelle 2.1: Wirbel in der Natur

Art	Wirbelgrösse
Badewannenablauf	0,1m
Tornado	50m
Hoch- und Tiefdruckgebiete	100 - 4000 km
Hurricane	100 - 1000 km
Galaxien	10000 - 200000 Lichtjahre

Wirbel können in unterschiedlichsten Medien und aufgrund unterschiedlichster physikalischer Begebenheiten entstehen. In der Strömungslehre sind häufig Dichteunterschiede bzw. das Vorhandensein eines Geschwindigkeitsgradienten für die Entstehung von Wirbeln verantwortlich. Diese können z.B. durch Reibung entstehen. Allgemeiner betrachtet kann jedoch auch das Vorhandensein jeglicher Art von Kräften (wie z.B. elektromagnetische Kräfte, Gravitation) Ausgangspunkt für die Entstehung von Wirbeln sein.

## 2.2 Kavitation und Kavitationsarten

Kavitation tritt, wie zuvor beschrieben, vereinfacht bei der Unterschreitung eines kritischen Drucks auf. Dieser kritische Druck wird zum einen durch den thermodynamischen Dampfdruck bestimmt und ist zum anderen abhängig von der Keimzahl des Fluids. Die Abb. 2.1 zeigt das Phasendiagramm für Wasser mit der zugehörigen Sättigungsdampfdruckkurve. Es illustriert den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und der Phase. Nähere Informationen zum Phasendiagramm von Wasser können aus [24] entnommen werden.

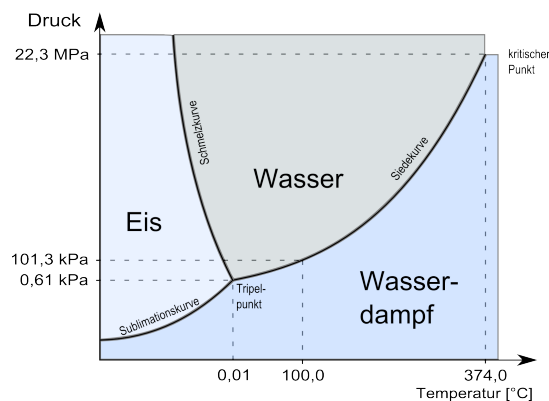


Abbildung 2.1: Phasendiagramm von Wasser

Neben dem dargestellten Sättigungsdampfdruck ist das Vorhandensein von Kavitationskeimen eine notwendige Eigenschaft. Bei Kavitationskeimen handelt es sich um in der Flüssigkeit vorhandene Mikroblasen. Die Anzahl dieser Kavitationskeime hat einen wesentlichen Einfluss auf den effektiven Sättigungsdampfdruck. An den Stellen der Kavitationskeime werden die Van-der-Waals-Wechselwirkungen angrenzender Atome gelöst und erhöhen die Anfälligkeit für Kavitationsbildung. Sind nur sehr wenige Kavitationskeime in einer Flüssigkeit vorhanden, so kann der Kavitationsbeginn erst deutlich unterhalb des Dampfdruckes einsetzen. Zur Bestimmung der Kavitationsgrenze wird die aus der Ähnlichkeitstheorie bekannte dimensionslose Kavitationszahl  $\sigma$  herangezogen. Die Definition der Kavitationszahl lautet

$$\sigma = \frac{p - p_{sat}}{\frac{1}{2}\rho \vec{u}^2} \quad (2.1)$$

mit dem Druck der ungestörten Strömung  $p$ , dem Sättigungsdampfdruck  $p_{sat}$ , der Dichte des Fluids  $\rho$  und der ungestörten Anströmgeschwindigkeit  $\vec{u}$ . Kavitation kann je nach Bauteil und Strömungsverhalten in unterschiedlichen Arten auftreten. In Kavitationsversuchen konnten bisher folgende Arten von Kavitation beobachtet werden:

- **Blasen kavitation:** Blasen kavitation ist gekennzeichnet durch das Auftreten einzelner nahezu sphärischer Blasen im Strömungsgebiet. Die Blasen bleiben nahezu kugelförmig und werden in Richtung der Strömung transportiert. Die Interaktion unter den Blasen spielt eine untergeordnete Rolle. Beim Propeller tritt diese Art der Kavitation meist in zentraler Lage auf der Saugseite auf.
- **Schicht kavitation:** Schicht kavitation zeichnet sich durch ein großes zusammenhängendes Dampfgebiet aus, welches an einer Oberfläche anliegt. Es trennt das Fluid von der Oberfläche und ist somit verantwortlich für die Verringerung des Reibungswiderstands. Obwohl das Kavitationsgebiet an der Oberfläche anliegt, handelt es sich um ein stark instationäres Strömungsverhalten. Die Lage des Kavitationsgebiets bleibt zwar konstant, jedoch ändert sich die Größe des Dampfgebiets ständig und Teile können sich in Strömungsrichtung ablösen. Beim Propeller tritt Schicht kavitation im Bereich der Eintrittskante auf und vermischt sich zur Flügelspitze hin mit der Spitzenwirbel kavitation.
- **Wolken kavitation:** Wolken kavitation entsteht in Folge der Schicht kavitation. Bei der Wolken kavitation handelt es sich um eine sich periodisch ablösende Schicht kavitation. Die Ablösung erfolgt durch einen rückwärtigen Flüssigkeitsstrahl, welcher als Re-Entrant Jet bezeichnet wird. Die abgelösten Blasenwolken werden in einem Wirbel stromabwärts transportiert.
- **Wirbel kavitation:** Viele Strömungen hoher Reynoldszahlen zeigen Bereiche hoher Wirbelstärke. Wirbel kavitation tritt in solchen Wirbeln auf, in denen eine Druckabsenkung im Wirbelkern bis unterhalb des Sättigungsdampfdrucks auftritt. Diese Art der Kavitation kann bei Propellern z.B. im Spitzenwirbelbereich oder im Bereich des Nabenwirbels auftreten.

### 2.3 Kavitation im Schiffbau

Kavitation im Schiffbau wurde zum ersten Mal Ende des 19. Jahrhunderts festgestellt. Der Erfinder der Dampfturbine, Sir Charles Algernon Parsons, baute den Prototyp eines Schiffes, welches mit einer Dampfturbine angetrieben wurde. Statt der erwarteten Geschwindigkeit von etwa 35 Knoten wurden jedoch nur 20 Knoten erreicht. Bei hohen Drehzahlen konnten an den Propellerflügeln Dampfblasen beobachtet werden. Der Grund für die geringere Geschwindigkeit war also nicht die zu geringe Leistung der Dampfturbine, sondern die Kavitation am Propeller.



Abbildung 2.2: MS Turbinia [Bildquelle: wikipedia, Urheber unbekannt]

Spitzenwirbelkavitation am Propeller tritt häufig als erste Kavitationsform auf. Die Intensität dieser Kavitationsart kann bei zunehmender Belastung des Propellers durch einen Übergang der Schichtkavitation an der Propellerspitze in den Spitzenwirbel noch verstärkt werden. Die Spitzenwirbelkavitation ist häufig über mehrere Umdrehungen des Propellers zu erkennen. Trifft dieser kavitierende Spitzenwirbel auf das Ruder, so kann es hier zu Schäden der Rudergeometrie kommen. Dieses Phänomen gilt ebenso für den Nabenwirbel. Trifft der kavitierende Nabenwirbel auf die Rudergeometrie, kann es auch hier zu Schäden kommen. Genauere Untersuchungen zu Kavitationserosion durch kavitierende Spitzen- bzw. Nabenwirbel wurden von Bark et al. [4] durchgeführt. Ein kavitierendes Wirbelsystem hinter einem Schiffspropeller im Modellmaßstab ist in Abb. 2.3 zu sehen.

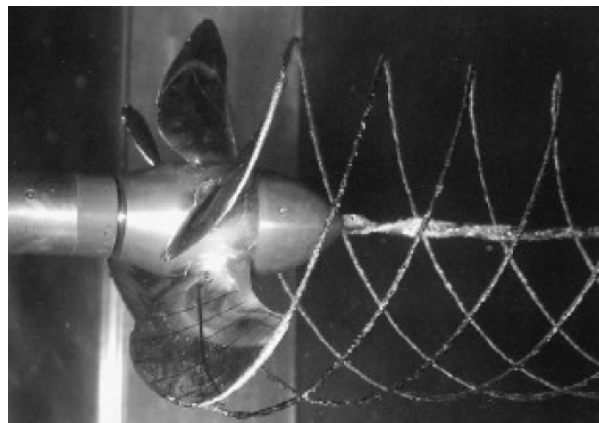


Abbildung 2.3: Kavitierendes Wirbelsystem [1]

Einen Überblick über die möglichen Kavitationsarten am Propeller zeigt die Abb. 2.4. Neben den bereits angesprochenen Wirbelkavitationen an der Flügelspitze und an der Propellernabe sowie der Schichtkavitation kann sich durch ablösende Schichtkavitation Wolkenkavitation im Bereich der Propellerflügel bilden. Im Bereich des Übergangs vom Propellerflügel zur Nabe



kann sich bei starker Belastung des Propellers Kavitation ausbilden. Ebenfalls kann im Bereich der Saugseite des Propellers Blasen kavitation auftreten.

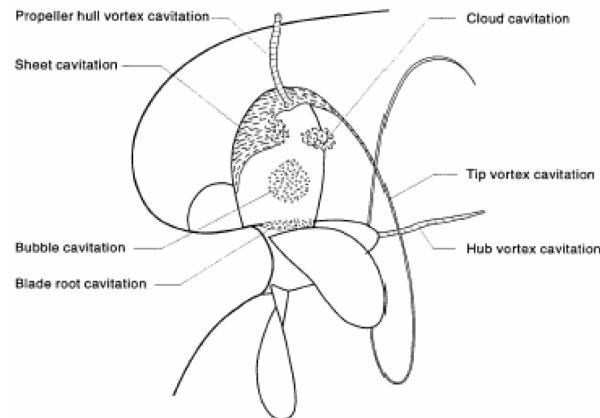


Abbildung 2.4: Kavitationsarten am Propeller [Bildquelle: boatdesign.net, Urheber unbekannt]

### 2.4 Aufgabenstellung und Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung numerischer Methoden zur Vorhersage von Kavitation unter Berücksichtigung der Besonderheiten für Vortriebs- und Steuerorgane in der Schiffstechnik. Die durch Kavitation entstehende Zweiphasenströmung hat einen wesentlichen Einfluss auf den Wirkungsgrad und das Vibrationsverhalten dieser Systeme. Die meist verwendete Euler-Euler Methode liefert gute Ergebnisse zur Kavitationsprognose in Bereichen, in denen die lokalen Gradienten der Strömung klein sind. Dagegen versagt sie in Regionen starker Strömungsänderung, wie z.B. im Randwirbel an einer Propellerblattspitze. Ursache hierfür sind die starken Einschränkungen dieses Modells, wie der Transport der Dampfphase entlang der Stromlinien und die vereinfachte Blasendynamik.

Ein Problem der Simulation von Kavitationseffekten ist die Komplexität der schiffstechnischen Strömungsprobleme, und damit verbunden, der extreme Rechenaufwand zur Auflösung relevanter Strömungsdetails. Da vorhandene Rechnerkapazitäten hierfür selten ausreichen, müssen Effekte numerischer Dissipation zum Teil in Kauf genommen werden. Abgehende Spitzenwirbel am Propeller werden aufgrund ihrer kleinen Skalenlängen und großen Gradienten jedoch besonders stark beeinflusst, wodurch das Kavitationsfeld wesentlich verfälscht wird.

Eine Möglichkeit diese Dissipation zu verringern ist die Anwendung einer Vorticity-Confinement-Formulierung. Unter Vorticity Confinement versteht man das Einbringen einer antidissipativ wirkenden Kraft in Bereichen hoher Wirbelstärke. Es ermöglicht das künstliche

Aufrechterhalten von Wirbelstärke auch bei Rechengittern mit nicht ausreichend diskretisierten Netzen. Gerade in turbulenten Strömungen sind die bisher bekannten Methoden nicht geeignet, da eine deutlich höhere Wirbelstärke, z.B. in der Grenzschicht, vorliegt. Ein Konzept für die Einbringung der antidissipativen Kraftterme, das auf der Bestimmung der gültigen lokalen Bereiche aufbaut, soll entwickelt und für Schiffsantriebe getestet werden.

### 3 Modellierung kavitierender Strömungen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Methoden und Gleichungen zur Simulation kavitierender Strömungen vorgestellt. Zunächst werden die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben, gefolgt von den Methoden zur Berechnung von turbulenten Strömungen und von Strömungen mit Phasenübergang. Eine genauere Betrachtung der Diskretisierungsmethoden und deren Fehler folgt im Anschluss.

#### 3.1 Erhaltungsgleichungen

Die Basis auf der die numerischen Verfahren zur Berechnung strömungstechnischer Problemstellungen beruhen sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik. Die sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen setzen sich zusammen aus der Kontinuitätsgleichung, den Impulsgleichungen und der Energiegleichung und bilden ein System nichtlinearer, gekoppelter, partieller Differentialgleichungen. Die zentralen Gleichungen sind die Impulsgleichungen, welche der Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten dient. Die Kontinuitätsgleichung hat keine ihr zugeteilte Variable und dient im Falle einer kompressiblen Strömung lediglich der Bestimmung der Dichte. Die Variable des Drucks kann ebenfalls nicht direkt aus einer Gleichung bestimmt werden. Zur Bestimmung des Drucks ist es notwendig, die Navier-Stokes-Gleichungen so zu koppeln, dass eine Berechnung des Drucks möglich ist. Das Lösen der Energie-Gleichung ist für die Berechnung kompressibler Strömungen notwendig. Die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen lauten in Integralform

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV + \int_S \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \sum \vec{F} \quad (3.2)$$

mit

$$\vec{F} = \int_S \vec{T} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{b} dV \quad (3.3)$$

Formel 3.1 ist die Massenerhaltungsgleichung mit der Zeit  $t$ , dem Volumen des Kontrollvolumens  $V$ , der Dichte  $\rho$ , der Randfläche des Kontrollvolumens  $S$ , der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  und dem Normalenvektor  $\vec{n}$  der Oberfläche  $S$ . Formel 3.2 ist die Impulsgleichung mit der Summe

aller auf das Kontrollvolumen wirkenden Kräfte. Diese Kräfte (Formel 3.3) können zum einen Oberflächenkräfte (Druck, normale und Scherspannungen, Oberflächenspannung) oder auch Volumenkräfte (Gravitation, Zentrifugal- oder Corioliskräfte) sein. Bei den Navier-Stokes-Gleichungen handelt es sich um ein Anfangsrandwertproblem. Zur Lösung der Differentialgleichungen sind Anfangswerte zum Zeitpunkt  $t = 0$  sowie Randwerte, sogenannte Randbedingungen, an den Rändern des Rechengebiets notwendig. Für eine genauere Beschreibung und Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen wird auf die bekannte Literatur verwiesen (z.B. [13],[40]).

## 3.2 Diskretisierung

### 3.2.1 Finite-Volumen

Das Finite-Volumen-Verfahren ist ein Verfahren zur Lösung von Erhaltungsgleichungen. Es ist die am weitesten verbreitete Methode in der Strömungsmechanik zur Lösung der Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible und inkompressible Strömungsprobleme. Es handelt sich bei dem Finite-Volumen-Verfahren um ein streng konservatives Verfahren. Alle Erhaltungsgrößen werden, wie vom mathematischen Modell gefordert, auch im diskretisierten Fall per Definition erfüllt.

### 3.2.2 Fehlerarten

Bei der Berechnung von Strömungen mit numerischen Methoden treten die unterschiedlichsten Fehlerarten auf. Die auftretenden Fehlerarten sind aufgrund der Eigenschaften numerischer Methoden unvermeidbar, müssen jedoch vom Anwender abgeschätzt und beurteilt werden. Einige Fehlerarten sind direkt durch den Nutzer beeinflussbar. Die Summe aller Fehler bildet den Gesamtfehler der numerischen Berechnung. Die folgenden Abschnitte beschreiben kurz die unterschiedlichen Fehlerarten und die Möglichkeit der Beeinflussung.

#### 3.2.2.1 Modellfehler

Modellfehler treten bei der Modellierung physikalischer Eigenschaften von Fluiden auf. Den größten Modellfehler in einer Strömung aus dem Ingenieurbereich bildet die Turbulenzmodellierung. Die turbulenten Eigenschaften einer Strömung können aufgrund begrenzter Rechenkapazität nicht exakt gelöst werden und werden somit durch Modelle simuliert. Diese

Modelle entsprechen nur angenähert der exakten Lösung. Man spricht hier also von einem Modellfehler. Andere Modellfehler treten z.B. bei den Randbedingungen oder bei der Vergabe von Stoffeigenschaften auf. Die Gründe für Modellfehler liegen nicht immer auf der Seite des Rechenmodells, denn oftmals können die physikalischen Eigenschaften nicht ausreichend gemessen werden um ein exaktes Modell zu generieren oder vorhandene Modelle und deren Konstanten ausreichend zu validieren.

#### **3.2.2.2 Diskretisierungsfehler**

Unter dem Diskretisierungsfehler versteht man den Unterschied zwischen der exakten Lösung der Erhaltungsgleichungen und der exakten Lösung der diskretisierten Approximation. Einen großen Einfluss auf den Diskretisierungsfehler hat somit die Gitterstruktur und -auflösung. Geht die Zellgröße in einem Finite-Volumen-Gitter gegen null, geht auch der Diskretisierungsfehler gegen null. Aufgrund begrenzter Rechenkapazität ist es natürlich nicht möglich für jedes Strömungsproblem mit einer ausreichenden Diskretisierung in allen Bereichen der Strömung zu rechnen. Als Anwender hat man die Möglichkeit, bei ausreichender Kenntnis der Strömung, Gebiete mit z.B. hohen Gradienten ausreichend fein zu diskretisieren. Eine weitere Möglichkeit den Diskretisierungsfehler zu verringern ist eine Erhöhung der Approximationsgenauigkeit. Um dem Diskretisierungsfehler entgegenzuwirken können antidissipative Terme zum Einsatz kommen.

#### **3.2.2.3 Iterationsfehler**

Der Iterationsfehler ist definiert als Differenz zwischen der exakten und der iterativen Lösung. Die Lösung der diskretisierten Erhaltungsgleichungen erfolgt in der Regel iterativ. Die Genauigkeit jedes Iterationsschritts wird durch die berechneten Residuen angezeigt. In einer konvergierenden Lösung sinken mit jedem Iterationsschritt die berechneten Residuen und der Iterationsfehler geht gegen null. Da sich für komplexe Strömungsprobleme nicht immer konvergierende Lösungen ergeben, bleibt oftmals trotz ausreichender Iterationsschritte ein Iterationsfehler vorhanden. Ob eine Strömungsberechnung konvergiert oder nicht, kann die unterschiedlichsten Gründe haben. In den meisten Fällen ist dies jedoch abhängig von der örtlichen Diskretisierung.

#### 3.2.2.4 Rundungsfehler

Die Architektur von Computern lässt nur eine mathematische Berechnung bis zu einer bestimmten Genauigkeit zu. Kann aufgrund der systembedingten Beschränkung eine mathematische Operation nicht exakt berechnet werden, wird das Ergebnis gerundet. Rundungsfehler spielen in der numerischen Strömungsberechnung nur dann eine Rolle, wenn mit großen Zahlen gerechnet wird. So kann z.B. die Angabe eines hohen Referenzdrucks den Rundungsfehler erhöhen und somit zu einer ungenaueren Berechnung der Druckdifferenzen führen. Die Norm IEEE 754 definiert Standarddarstellungen für binäre Gleitkommazahlen in Computern und legt ebenfalls die Verfahren für mathematische Operationen und Rundungen fest. Die Standarddarstellungen sind zum einen die 32 Bit- und zum anderen die 64 Bit-Darstellung. Bei der 32 Bit-Darstellung spricht man von single precision. Eine Gleitkommazahl wird als Folge von 32 Bit dargestellt. Eine höhere Genauigkeit und somit einen geringeren Rundungsfehler erreicht man mit der Nutzung der doppelten Genauigkeit (double precision). Gleitkommazahlen werden hierbei im Rechner als Folge von 64 Bit dargestellt. Für 64 Bit-Berechnungen wird die doppelte Speicherkapazität beansprucht.

#### 3.2.3 Numerische Diffusion

Unter numerischer Diffusion versteht man den Diskretisierungsfehler und den damit verbundenen Approximationsfehler der konvektiven Flüsse einer zugrundeliegenden Transportgleichung. Diese Diffusion bewirkt eine verfälschte Wiedergabe der exakten charakteristischen Lösung. Einen großen Einfluss auf die numerische Diffusion haben die Diskretisierungsverfahren und die Richtung der Winkel zwischen Strömungsrichtung und den Gitterlinien. Da man die Gitteranordnung bezüglich der Strömungsrichtung während der Gitternetzherstellung nur bedingt berücksichtigen kann, liegt der Schwerpunkt in diesem Kapitel auf den Approximationsverfahren. Je nach Auswahl des Approximationsverfahrens können bei Strömungen mit großen Gradienten große Abweichungen zur erwarteten Lösung auftreten. Die Lösung schmiert aus und eine erhöhte Dissipation ist festzustellen. Ein positiver Einfluss der numerischen Diffusion ist die Erhöhung der Stabilität des Lösungsalgorithmus. Störungen im Lösungsfeld werden ausgedämpft und machen somit eine Lösung des Problems erst möglich. Es muss sichergestellt werden, dass die numerische Dämpfung die konvergierende Lösung nicht verfälscht. Zur Approximation der konvektiven Flüsse sind zahlreiche Verfahren veröffentlicht worden. Alle Verfahren haben gemeinsam, dass der approximierte Wert aus umliegenden Werten bestimmt wird. Die am häufigsten verwendeten Verfahren und deren Einfluss auf die

numerische Diffusion wird in den folgenden Unterpunkten beschrieben. In den folgenden Betrachtungen wird  $\phi_e$  durch die benachbarten Werte  $\phi_E$  und  $\phi_P$  berechnet.

### 3.2.3.1 Zentraldifferenzen-Approximation (Central Differencing Scheme, CDS)

Das Zentraldifferenzen-Approximationsschema nutzt die lineare Interpolation zur Bestimmung des gesuchten Werts  $\phi_e$  einer Transportgleichung. Der gesuchte Wert wird bestimmt aus den umliegenden Werten in den Kontrollvolumenzentren. Die Strömungsrichtung von  $\phi$  hat bei dieser Approximation keinen Einfluss.

$$\phi_e \approx \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad (3.4)$$

mit dem Interpolationsfaktor

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (3.5)$$

Die Taylorreihenentwicklung um den Punkt  $P$  ergibt für das CDS-Verfahren einen Interpolationsfehler 2ter Ordnung.

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + H \quad (3.6)$$

Der Interpolationsfehler dieser Approximation ist proportional zum Quadrat des Gitterabstands. Der Nachteil der CDS-Approximation ist die Erzeugung oszillierender Lösungen. Oszillierende Lösungen können bei allen Approximationen 2ter Ordnung und höher auftreten. Zur Minderung dieser Oszillationen werden strömungsgerichtete Verfahren verwendet, wie z.B. das folgende Upwind-Verfahren. Als weitere Möglichkeit kann ein CDS-Verfahren mit einem Upwind-Anteil kombiniert werden.

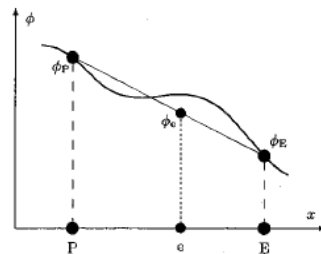


Abbildung 3.1: Approximation von  $\phi$  mit dem CDS-Verfahren [40]

### 3.2.3.2 Aufwind-Interpolation erster Ordnung (Upwind Differencing Scheme, UDS)

Aufwind-Interpolationsmethoden berücksichtigen bei der Differenzenbildung die Richtung der Strömungsgröße  $\phi$ . Der gesuchte Wert  $\phi_e$  einer eindimensionalen Transportgleichung für einen Skalar  $\phi$  stromaufwärts von  $e$  ist abhängig von der Richtung des Massenstroms und bildet sich wie folgt:

$$(\rho u \phi)_e = (\rho u \phi)_i, \quad \text{falls } \dot{m}_e > 0 \quad (3.7)$$

$$(\rho u \phi)_e = (\rho u \phi)_{i+1}, \quad \text{falls } \dot{m}_e < 0 \quad (3.8)$$

Das UDS-Verfahren ist ein Verfahren erster Ordnung wie die Taylor-Reihen-Entwicklung um den Punkt  $x_i$  zeigt.

$$\phi_e = \phi_i + (x_e - x_i) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{(x_e - x_i)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i + H \quad (3.9)$$

Es wird beim UDS-Verfahren nur der Term erster Ordnung auf der rechten Seite berücksichtigt. Alle Terme höherer Ordnung entfallen, weshalb dieses Schema einen stets diffusiven Charakter hat und somit keine oszillierende Lösung erzeugen kann. Der Abbruchfehler-Term des UDS-Verfahren lautet

$$f_d^e = \Sigma_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad (3.10)$$

mit dem Faktor für die numerische Diffusion  $\Sigma_e = (\rho u)_e \frac{\Delta x}{2}$ . Dieser Faktor ist für zwei- bzw. dreidimensionale Fälle abhängig von der Richtung der Strömung zur Ausrichtung des Gitters. Zur genaueren Untersuchung der Abhängigkeit wird die Gleichung 3.7 (in Differentialform) für den konvektiven Transport des Skalars  $\phi$  um eine Dimension erweitert.

$$\rho u_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

Diskretisiert man diese Gleichung nach dem UDS-Verfahren für  $u_x > 0$  und  $u_y > 0$  ergibt sich folgende Gleichung:



$$- (\rho u_x \phi_{i-1,j} \Delta y + \rho u_y \phi_{i,j-1} \Delta x) + \phi_{i,j} (\rho u_x \Delta y + \rho u_y \Delta x) = 0 \quad (3.12)$$

Formt man diese Gleichung um in eine Formulierung ähnlich Gl. 3.11, erhält man:

$$\rho u_x \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} + \rho u_y \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} = 0 \quad (3.13)$$

Die Approximation der Ableitungen in Gl. 3.11 wird gebildet durch die Differenzenquotienten

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.14)$$

und

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (3.15)$$

Die Gl. 3.13 stellt eine Näherung der Transportgleichung aus Gl. 3.11 für den Skalar  $\phi$  dar. Um nun den Diskretisierungsfehler zu bestimmen wird ein Vorgehen wie bei der eindimensionalen Formulierung herangezogen. Die Differenzenquotienten in Gl. 3.12 werden mit einer Taylorreihenentwicklung abgebildet und somit der Diskretisierungsfehler dargestellt.

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 - H (\Delta x^3) \quad (3.16)$$

bzw.

$$\phi_{i,j-1} = \phi_{i,j} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Delta y^2 - H (\Delta y^3) \quad (3.17)$$

Daraus folgt:

$$\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x + H (\Delta x^2) \quad (3.18)$$

und

$$\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Delta y + H (\Delta y^2) \quad (3.19)$$

Setzt man Gl. 3.18 und Gl. 3.19 nun in Gl. 3.13 ein, so liefert die entstandene Gleichung nun den Diskretisierungsfehler der UDS-Formulierung für den zweidimensionalen Fall.

$$\rho u_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2} \rho u_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x + \frac{1}{2} \rho u_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Delta y + \rho u_x H(\Delta x^2) + \rho u_y H(\Delta y^2) \quad (3.20)$$

Wie man in der Gl. 3.20 sieht, besitzt die Diskretisierung keinen Fehler erster Ordnung. Es handelt sich somit um eine konservative Diskretisierung. Die Terme zweiter Ordnung bilden den größten Fehler und bestimmen die Diffusion. Wie in der zweidimensionalen Formulierung deutlich zu erkennen ist, ist dieser Fehleranteil richtungsabhängig. Verläuft die Strömung in x- oder y-Richtung ( $u_x = 0$  oder  $u_y = 0$ ) sind auch die Diskretisierungsfehler zweiter Ordnung gleich null. Verläuft die Strömung nicht parallel zum Gitter ( $u_x \neq 0$  und  $u_y \neq 0$ ) tritt Diffusion auf und die Lösung verschmiert mit einer maximalen Diffusion bei einer diagonal zum Rechengitter ausgerichteten Strömung.

Für die Abschätzung des numerischen Fehlers in Abhängigkeit vom Winkel der Strömungsrichtung zur Gitterausrichtung gibt es Ansätze von de Vahl et al. [51]

$$\Gamma_{num} = \rho u \frac{\Delta x \Delta y \sin 2\theta}{4(\Delta x \cos^3 \theta + \Delta y \sin^3 \theta)} \quad (3.21)$$

und von Peric et al. [13]

$$\Gamma_{num} = \rho u \frac{\sin \theta \cos \theta (\Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta)}{2} \quad (3.22)$$

Der maximale numerische Fehler liegt für beide Gleichungen bei  $\theta = 45^\circ$  und beträgt

$$\Gamma_{num} = \rho u \frac{\Delta x}{2\sqrt{2}} \quad (3.23)$$

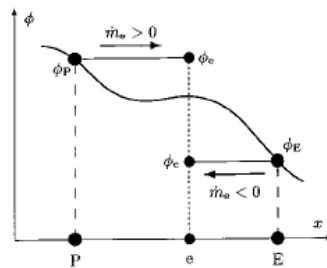


Abbildung 3.2: Approximation von  $\phi$  mit dem UDS-Verfahren [40]

### 3.2.3.3 Flux-Blending

Wie schon im vorherigen Kapitel erwähnt, verknüpft das Flux-Blending-Approximationsschema das CDS-Verfahren mit dem UDS-Verfahren.

$$\phi_e = \beta \phi_{e,CDS} + (1 - \beta) \phi_{e,UDS} \quad (3.24)$$

Anhand des Parameters  $\beta$  kann zwischen dem UDS- und dem CDS-Verfahren umgeschaltet werden. Oszillierende oder nicht konvergierende Lösungen mit dem CDS-Verfahren können durch Kombination mit einem UDS-Verfahren und entsprechender Anpassung des Parameters  $\beta$  zur Konvergenz gebracht werden ohne die hohen diffusiven Einbußen eines normalen UDS-Verfahrens.  $\beta$  kann global für das gesamte Rechengebiet gesetzt werden. Eine automatische Anpassung des Parameters  $\beta$  erfolgt bei der Hybrid-Methode [46]. Der Anteil von CDS- bzw. UDS-Approximation wird hier in Abhängigkeit von der Peclet-Zahl bestimmt und ist ein lokaler Parameter.

### 3.2.3.4 Quadratische Aufwind-Interpolation (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics, QUICK)

Die Interpolation mit dem QUICK-Verfahren ist eine Erweiterung der linearen Interpolation aus Kap. 3.2.3.1 mit einem Upwind-Charakter. Es wird nicht mehr wie beim CDS-Verfahren eine Gerade durch die benachbarten Kontrollvolumenzentren gelegt, sondern die Näherung erfolgt mit einem Polynom 2ten Grades (Parabel). Da für die Bestimmung einer Parabel jedoch drei Punkte benötigt werden, wird als dritter Punkt neben den im CDS-Verfahren ebenfalls verwendeten Kontrollvolumenzentren der Nachbarknoten, noch der stromabwärts liegende Folgeknoten verwendet. Durch diesen dritten Kontrollpunkt, welcher von der Strömungsrichtung abhängig ist, erhält dieses Verfahren einen Upwind-Charakter.

$$\phi_e = a_1 \phi_E - a_2 \phi_W + (1 - a_1 + a_2) \phi_P, \quad \text{falls } \dot{m}_e > 0 \quad (3.25)$$

$$\phi_e = b_1 \phi_P - b_2 \phi_E + (1 - b_1 + b_2) \phi_E, \quad \text{falls } \dot{m}_e < 0 \quad (3.26)$$

mit

$$a_1 = \frac{(1 - \lambda_w) \lambda_e^2}{1 + \lambda_e - \lambda_w} \quad (3.27)$$

$$a_2 = \frac{(1 - \lambda_e)(1 - \lambda_w)^2}{1 + \lambda_e - \lambda_w} \quad (3.28)$$

$$b_1 = \frac{(1 + \lambda_w)(1 + \lambda_e)^2}{1 + \lambda_{ee} - \lambda_e} \quad (3.29)$$

$$b_2 = \frac{\lambda_{ee}^2 \lambda_e}{1 + \lambda_{ee} - \lambda_e} \quad (3.30)$$

Das QUICK-Verfahren ist eine weitere Verbesserung des CDS-Verfahrens und liefert somit auch genauere Ergebnisse. Für äquidistante Gitter ist es ein Verfahren 3. Ordnung. Für nicht äquidistante Gitter ist es meist jedoch nur 2. Ordnung, da die Oberflächenintegrale oftmals nur mit der Genauigkeit 2. Ordnung berechnet werden und diese somit das Verfahren in der Genauigkeit begrenzen.

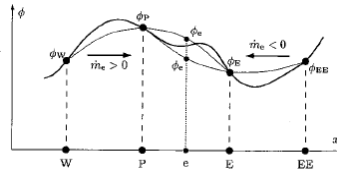


Abbildung 3.3: Approximation von  $\phi$  mit dem QUICK-Verfahren [40]

### 3.3 Turbulenzmodellierung

Ein Großteil der in der Ingenieurpraxis vorliegenden Strömungen sind von turbulentem Charakter. Bereits im Jahre 1883 zeigte der Physiker Osbourne Reynolds in einem Experiment den Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung. Eine einfache Rohrströmung wurde so lange beschleunigt, bis die vorliegende Strömung aufgrund der sichtbaren Verwirbelungen einen turbulenten Charakter erhielt. Beurteilt wird eine Strömung anhand der nach Osbourne Reynolds benannten Reynolds-Zahl  $Re$ . Sie stellt den Zusammenhang zwischen Trägheits- zu Zähigkeitskräften dar.

$$Re = \frac{\rho \vec{u} l}{\eta} = \frac{\vec{u} l}{\nu} \quad (3.31)$$

$\bar{u}$  beschreibt hier die mittlere, charakteristische Strömungsgeschwindigkeit mit einer problemabhängigen Referenzlänge  $l$  und der kinematischen Viskosität  $\eta$ . Wächst die Reynoldszahl über einen bestimmten problemabhängigen Wert  $Re > Re_{krit}$  an, beginnt der Umschlag von einer bis dahin laminaren Strömung in eine turbulente Strömung. Dieser Umschlag wird auch als Transition bezeichnet. Für die genannte Rohrströmung liegt diese kritische Reynoldszahl bei  $Re \approx 2300$  mit der Wahl des Rohrdurchmessers als charakteristischem Längenmaß. Turbulente Strömungen sind gekennzeichnet durch ihre Zufälligkeit, erhöhte Diffusion und Dissipation. Die Geschwindigkeitskomponenten in einer turbulenten Strömung sind völlig ungeordnet. In der Statistik wird bei einem solchen Zustand von einem deterministischen Chaos gesprochen. Die Diffusion übersteigt um ein Vielfaches die molekulare Diffusion und eine erhöhte Dissipation findet durch Umwandlung der kinetischen Energie in Wärme statt. Turbulente Strömungen sind stets instationär und dreidimensional.

#### 3.3.1 Direkte numerische Simulation

Die in Kapitel 3.1 eingeführten Navier-Stokes-Gleichungen gelten uneingeschränkt für turbulente Strömungen. Um jedoch die räumlichen und zeitlichen Schwankungen einer turbulenten Strömung durch die Navier-Stokes-Gleichungen zu erfassen, ist eine sehr feine Diskretisierung in Raum und Zeit notwendig. Die räumliche Gitterweite wird bestimmt durch die kleinsten turbulenten Wirbel und die Zeitschrittweite durch die Dauer der feinsten turbulenten Schwankungen, welche mit einem Anstieg der Reynoldszahl deutlich abnehmen. Sind diese Bedingungen durch die Diskretisierung erfüllt, spricht man von einer direkten numerischen Simulation (DNS). Die DNS ist das genaueste Verfahren zur Berechnung turbulenter Strömungen. Sie ist jedoch für eine in der Ingenieurpraxis vorliegenden Strömung mit einer im schiffstechnischen Umfeld typischen Reynoldszahl von  $10^7 < Re < 10^9$  aufgrund der hohen Ansprüche durch die Diskretisierung nicht durchführbar. Als Beispiel wird in Schäfer [40] die Dauer der Berechnung einer turbulenten Kanalströmung mit der Reynoldszahl  $Re = 10^6$  mit ca. 1600 Jahren vorhergesagt. Aufgrund der Leistungsentwicklung heutiger Computer ist dieser Wert zwar um einiges gesunken, liegt jedoch immer noch in einem für die praktische Anwendung unrealistischen Größenbereich. Zwei weitere Methoden zur Simulation turbulenter Strömungen sind die statistische Turbulenzmodellierung und die Grobstruktursimulation.

#### 3.3.2 Statistische Turbulenzmodelle

Die Methode der statistischen Turbulenzmodellierung ist die in der Ingenieurpraxis am weitesten verbreitete Methode zur Berechnung turbulenter Strömungen. Die Basis der Reynolds-

gemittelten Modelle ist die Mittelung der Instationarität. Da in vielen anwendungsbezogenen Strömungen nur die statistischen Eigenschaften der Strömung von Interesse sind, bildet diese Wahl der Turbulenzmodellierung einen guten Kompromiss aus Effizienz und Genauigkeit. Jede Strömungsgröße  $\phi(x_i, t)$  wird dargestellt als eine zeitgemittelte Größe  $\bar{\phi}(x_i)$  und einer Schwankung  $\phi'(x_i, t)$  um diese Größe.

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i) + \phi'(x_i, t) \quad (3.32)$$

Für eine statistisch stationäre Strömung gilt:

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(x_i, t) dt \quad (3.33)$$

Wird die Mittelungszeit  $T$  ausreichend groß gewählt, ist die Mitteilung unabhängig vom Zeitpunkt  $t_0$ . Für eine statistisch instationäre Strömung ist der Mittelwert ebenso wie die Schwankungsgröße zeitabhängig und wird durch eine Ensemble-Mittelung bestimmt.

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(x_i, t) \quad (3.34)$$

$N$  ist hierbei die Anzahl der Ensemblemittelungen. Sie muss ausreichend groß gewählt werden, um die Erfassung von Fluktuationseffekten zu eliminieren. Damit die Mittelung zeitabhängig bleibt, darf das Intervall der Ensemblemittelungen jedoch nicht zu groß gewählt werden. In der Abb. 3.4 sind die Mittelung einer stationären und einer instationären Strömung zu sehen.

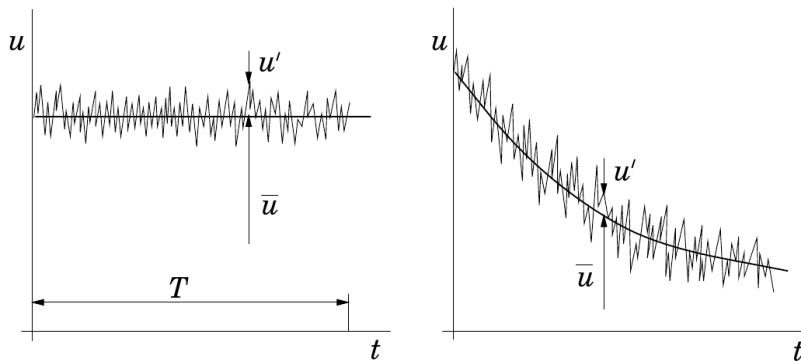


Abbildung 3.4: Zeitmittelung für eine statisch stationäre Strömung (links) und eine statisch instationäre Strömung (rechts) [13]

Diese Mittelung kann auf die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Navier-Stokes-Gleichungen angewendet werden. Man spricht dann von den sogenannten Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Gleichungen).

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \rho \overline{u'_i u'_j} - \eta \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \rho f_i \quad (3.36)$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen vereinfachen sich durch die stationären bzw. instationären Mittelungen, die Anzahl der Unbekannten nimmt jedoch in Form der gemittelten Schwankungen  $\overline{u'_i u'_j}$  zu. Bei dem gemittelten Produkt der Schwankungen  $\rho \overline{u'_i u'_j}$  spricht man von den Reynolds-Spannungen. Da das Gleichungssystem nicht mehr geschlossen ist, müssen Annahmen für die Reynolds-Spannungen getroffen werden. Diese Annahmen werden als Turbulenzmodell bezeichnet. Man unterscheidet zwischen Null-, Ein- und Zweigleichungsmodellen sowie Schliessungsansätzen 2. Ordnung. Die Gemeinsamkeit aller Modelle liegt in der Schließung über eine direkte Modellierung des Reynoldsspannungstensors nach dem Ansatz von Boussinesq.

$$\rho \overline{u'_i u'_j} = -\mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k \quad (3.37)$$

Die Wirbelviskosität oder auch turbulente Viskosität  $\mu_t = \rho \nu_t$  ist eine im Strömungsfeld veränderliche Variable im Gegensatz zu den Stoffgrößen der kinematischen und dynamischen Viskosität (Wirbelviskositätshypothese).  $k$  wird als turbulente kinetische Energie bezeichnet und ist wie folgt definiert.

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{u'_i u'_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \overline{u'_x u'_x} + \overline{u'_y u'_y} + \overline{u'_z u'_z} \right) \quad (3.38)$$

#### 3.3.2.1 Null- und Eingleichungsmodelle

Die Wirbelviskositätsannahme kann wie schon oben beschrieben auf unterschiedliche Weise implementiert werden. Die einfachste Implementierung ist die der Nullgleichungsmodelle. Die Wirbelviskosität wird über einer charakteristischen Geschwindigkeit des turbulenten Impulstransports  $q = \sqrt{2k}$ , einer charakteristischen Länge des turbulenten Impulstransports  $l$  und einer dimensionslosen Konstanten  $C_\mu$  wie folgt modelliert.

$$\mu_t = C_\mu \rho q l \quad (3.39)$$

Die Bestimmung des Längenmaß  $l$  und der Geschwindigkeit  $q$  kann nur für einfache nicht abgelöste Strömungen bestimmt werden, weshalb diese Modelle in der Praxis eine relativ geringe Bedeutung spielen. Das bekannteste Null-Gleichungs-Modell ist das Baldwin-Lomax-Modell [2].

Bei Eingleichungsmodellen wird eine zusätzliche Transportgleichung zur Bestimmung der turbulenten Wirbelviskosität gelöst. In dem bekanntesten Eingleichungsmodell von Spalart und Allmaras [45] wird eine Transportgleichung für die Hilfsgröße  $\tilde{\nu}$  eingeführt, welche der turbulenten Viskosität angenähert ist. Die Bestimmung des turbulenten Längenmaß erfolgt ähnlich den Nullgleichungsmodellen aus empirischen Ansätzen. Da Null- und Eingleichungsmodelle in dieser Arbeit nicht angewendet wurden, wird auf eine genauere Beschreibung verzichtet.

#### 3.3.2.2 Zweigleichungsmodelle

Zweigleichungsmodelle sind die am meisten verbreiteten Modelle in der Ingenieurpraxis. Sie bieten einen geeigneten Mittelweg zwischen der Auflösung turbulenter Effekte und dem dafür nötigen Rechenaufwand. Die Wirbelviskosität wird nach folgendem Ansatz modelliert:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.40)$$

Es wird, wie bei den Eingleichungsmodellen, eine partielle Differentialgleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$  und zusätzlich eine partielle Differentialgleichung für die Bestimmung des turbulenten Zeit- und Längenmaßes gelöst. Im Folgenden werden das Standard-k- $\varepsilon$ -[26], [25], das Wilcox k- $\omega$ -[55], das SST-Modell [31],[32] und eventuelle Entwicklungen aus diesen näher beschrieben. Sie werden häufig in der anwendungsbezogenen Simulation angewendet und auch in dieser Arbeit genutzt.

#### Standard-k- $\varepsilon$ -Modell

Das k- $\varepsilon$ -Modell [26], [25] ist ein sehr weit verbreitetes Turbulenzmodell. Um das Gleichungssystem zu schließen werden Annahmen für die beiden Unbekannten  $k$  und  $\mu_t$  der Formel 3.37



getroffen und diese in Verbindung gesetzt. Die partiellen Differentialgleichungen der turbulenten kinetischen Energie und der Dissipationsrate lauten daraufhin wie folgt:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \bar{u}_j k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = G - \rho \varepsilon \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \bar{u}_j \varepsilon - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] = C_{\varepsilon 1} G \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.42)$$

mit dem Produktionsterm  $G$

$$G = \tau_{ij} \frac{\delta \bar{u}_i}{\delta x_j} \quad (3.43)$$

und den Parametern

Tabelle 3.1: Modellkonstanten des Standard-k- $\varepsilon$ -Modells

$C_\mu$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$\sigma_\varepsilon$	$\sigma_k$
0.09	1.44	1.92	1.3	1

Die Parameter sind aus Ergebnissen von Berechnungen einfacher Strömungsfelder ermittelt worden, für welche das Modell gute Übereinstimmungen mit Messergebnissen liefert. Das Standard-k- $\varepsilon$ -Modell liefert nur für hochturbulente Strömungen ausreichend genaue Ergebnisse. Zahlreiche Autoren haben Erweiterungen des Standard-k- $\varepsilon$ -Modells vorgenommen. Diese basieren z.B. auf Abhängigkeiten von Rotationseffekten oder bzw. und Krümmungseffekten. Für Strömungen mit Staupunkten erfolgte eine Abwandlung des Produktionsterms nach Kato und Launder [23]. Weiterhin sollte noch das renormalization group (RNG) k- $\varepsilon$ -Modell [21] erwähnt werden, welches einen zusätzlichen Term in der  $\varepsilon$ -Gleichung (Gl. 3.42) aufweist und sich zudem in abweichenden Parameterwerten der Tab. 3.1 zum Standard-k- $\varepsilon$ -Modell unterscheidet.

#### k- $\omega$ -Modell

Bereits 1970 wurde das k- $\omega$ -Modell von Saffmann [38] vorgeschlagen. Aus weiteren Entwicklungen ist das weit verbreitete Wilcox k- $\omega$ -Modell [55] entstanden. Es wird ebenfalls eine

Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$  aufgestellt. Als zweite Gleichung wird eine Gleichung für das inverse Zeitmaß (charakteristische Frequenz der energiedissipierenden Wirbel)  $\omega$  gelöst. Die numerischen Eigenschaften und Lösungsmethoden ähneln den zuvor beschriebenen  $k$ - $\varepsilon$ -Modellen. Die Gleichungen für  $k$  und  $\omega$  lauten wie folgt:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (3.45)$$

Die Wirbelviskosität wird nach folgendem Ansatz modelliert:

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega} \quad (3.46)$$

In der nachfolgenden Tabelle werden die Parameter des Wilcox  $k$ - $\omega$ -Modells angegeben.

Tabelle 3.2: Modellkonstanten des Wilcox- $k$ - $\omega$ -Modells

$\alpha$	$\beta$	$\beta^*$	$\sigma$	$\sigma^*$
$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Die Vorteile des  $k$ - $\omega$ -Modells gegenüber  $k$ - $\varepsilon$ -Modellen liegt in der exakteren und robusteren wandnahen Modellierung für niedrige Reynoldszahlen. Ein grosser Nachteil ist die starke Abhängigkeit der Berechnungsergebnisse in der freien Strömung von der Einlass-Randbedingung für  $\omega$ . Ähnlich den  $k$ - $\varepsilon$ -Modellen wurden auch bei den  $k$ - $\omega$ -Modellen Erweiterungen vorgenommen. Die nennenswerteste Entwicklung ist die des Baseline (BSL)  $k$ - $\omega$ -Modells, welche das  $k$ - $\omega$ -Modell in wandnahen Bereichen löst und im Fernfeld das  $k$ - $\varepsilon$ -Modell. Da es sich hier um eine Vorstufe des im folgenden Absatzes beschriebenen  $k$ - $\omega$ -SST-Modell handelt, wird eine genauere Beschreibung des BSL  $k$ - $\omega$ -Modells hier nicht vorgenommen.

#### Shear-Stress-Transport-Modell ( $k$ - $\omega$ -SST-Modell)

Das  $k$ - $\omega$ -SST-Modell nach Menter et al. [31],[32] ist wie die zuvor genannten Modelle ein Zweigleichungsmodell nach dem Wirbelviskositätsprinzip. Es vereint die Vorteile des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells mit den Vorteilen des  $k$ - $\omega$ -Modells. Die Turbulenz wird innerhalb der Grenzschicht

mit dem  $k$ - $\omega$ -Modell abgebildet, während im Fernfeld die Turbulenz nach dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell abgebildet wird. Ermöglicht wird diese Unterteilung durch eine Überführung des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells in eine Formulierung des  $k$ - $\omega$ -Modells und eine anschließende Addition. Die Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und der charakteristischen Frequenz  $\omega$  lauten wie folgt:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \sigma_\omega \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (3.48)$$

Ein bekanntes Problem bei Zweigleichungsturbulenzmodellen ist die Überproduktion von turbulenter kinetischer Energie in den Staupunkten. Im  $k$ - $\omega$ -SST-Modell wird für den Produktionsterm  $P_k$  ein Limiter eingeführt, welcher diese Überproduktion unterbindet.

$$P_k = \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, 10 \beta^* K \omega \right) \quad (3.49)$$

Ein weiteres Problem der zuvor beschriebenen Zweigleichungs-Turbulenzmodelle ist die Bestimmung der Ablösungsgebiete bei glatten Oberflächen aufgrund der Nichtbeachtung turbulenter Spannungen. Dieses führt zu einer Überbestimmung der Wirbelviskosität und wird im  $k$ - $\omega$ -SST-Modell erneut anhand eines Limiters begrenzt.

$$\nu_t = \mu_t \rho = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (3.50)$$

$S$  beschreibt die Deformationsrate anhand der Gleichung

$$S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (3.51)$$

mit dem Tensor der Deformationsrate

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.52)$$

Die in der  $\omega$ -Transportgleichung auftretende Funktion  $F_1$  und die in der Wirbelviskositätsformulierung auftretende Funktion  $F_2$  sind verantwortlich für den jeweiligen Einsatz des Turbulenzmodells. Für Bereiche nahe einer Wandrandbedingung bzw. innerhalb einer Grenzschicht nimmt die Funktion  $F_1$  den Wert 1 an. Die Berechnung der charakteristischen Frequenz erfolgt somit nach der Formulierung des k- $\omega$ -Modells. Für Bereiche außerhalb der Grenzschicht nimmt  $F_1$  den Wert 0 an. Die Gleichungen der Turbulenzmodellierung werden nach der transponierten Formulierung des k- $\varepsilon$ -Modells gelöst. Die Formulierung der Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  lauten wie folgt:

$$F_1 = \tanh \left[ \left[ \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \mu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega 2k}}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right]^4 \right] \quad (3.53)$$

$$F_2 = \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right] \quad (3.54)$$

y steht in diesen Formeln für den Wandabstand zur nächsten geometrischen Wandrandbedingung.  $CD_{k\omega}$  wird anhand folgender Formel beschrieben:

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right) \quad (3.55)$$

Die Konstanten des k- $\omega$ -SST-Modells sind in der folgenden Tabelle abgebildet.

Tabelle 3.3: Modellkonstanten des k- $\omega$ -SST-Modells

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta^*$	$\sigma_{k1}$	$\sigma_{k2}$	$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$
$\frac{5}{9}$	0.44	$\frac{3}{40}$	0.0828	$\frac{9}{100}$	0.85	1	0.5	0.856

Die verwendeten Konstanten während der Berechnung stehen in einem linearen Zusammenhang in Abhängigkeit der Funktion  $F_1$  und errechnen sich wie folgt:

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1) \quad (3.56)$$

#### Modifiziertes k- $\omega$ -SST-Modell für kavitierende Strömungen

Das k- $\omega$ -SST-Modell kann für kavitierende Strömungen nach einer Idee von Coutier-Delgosha und Reboud et al. [9] abgeändert werden. Die Idee ist eine Verringerung der Wirbelviskosität  $\mu_t$  in kavitierenden Bereichen. Alle Modellkonstanten und auch die Gleichungen für k und  $\omega$  bleiben unverändert. Die Formulierung der Wirbelviskosität in Gl. 3.46 wird ersetzt durch:

$$\mu_t = f(\rho) \frac{k}{\omega} \quad (3.57)$$

mit

$$f(\rho) = \rho_v + \frac{(\rho - \rho_v)^n}{(\rho_l - \rho_v)^{n-1}} \quad (3.58)$$

und  $n > 1$ . Die Wirbelviskosität wird anhand der Formulierung in 3.58 in kavitierenden Bereichen mit einem hohen Dampfanteil verringert. Für nichtkavitierende Bereiche bleibt die ursprüngliche Formulierung erhalten. Berechnungen zur Validierung des Turbulenzmodells ergaben gute Übereinstimmungen für  $n = 10$  [9], [28].

#### 3.3.3 Grobstruktursimulation

Der Rechen- und Modellierungsaufwand für eine Grobstruktursimulation, auch Large Eddy Simulation (LES) genannt, liegt zwischen denen einer DNS und den RANS-Modellen. Diese Methode unterscheidet zwischen klein- und großskaligen Turbulenzstrukturen. Es erfolgt eine Filterung in aufgelösten Skalen (Grid-Scales, GS) und nichtaufgelösten Längenskalen (Sub-Grid-Scales, SGS). Während die aufgelösten Skalen analog zur DNS räumlich und zeitlich exakt modelliert werden, muss für die nicht aufgelösten Skalen eine Modellierung stattfinden. Die Modellierung der Feinstrukturen beinhaltet sowohl die Wechselwirkung der kleinen Skalen, den Energietransport zu kleinen Skalen sowie den Übergang zwischen GS und SGS. Am weitesten verbreitet sind die Modelle nach Smagorinsky [44] und das dynamische Modell nach Germano et al. [15].

### 3.4 Zwei-Phasen-Strömung

Zwei-Phasen-Strömungen sind gekennzeichnet durch einen Dichtesprung am Phasenwechsel. Dieser tritt z.B. bei der Modellierung einer freien Wasseroberfläche oder in Kavitati-

onsgebieten auf. Speziell bei der Modellierung freier Wasseroberflächen ist ein scharfer Phasenübergang erwünscht. Aufgrund des hohen Dichteunterschieds des Trägermaterials Wasser ( $\rho_{\text{Wasser}} \approx 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) zu Luft ( $\rho_{\text{Luft}} \approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) und des Viskositätsunterschieds (25 zu 1) treten numerische Schwierigkeiten bei der Modellierung auf. Grundsätzlich kann man die Modellierung von Strömungen mit scharfen Dichtewechseln in zwei Verfahren unterteilen.

- Interfaceverfolgungsmethoden
- Interfaceerfassungsmethoden

#### 3.4.1 Interfaceverfolgungsmethoden

Interfaceverfolgungsmethoden werden genutzt um freie Wasseroberflächen zu modellieren. Bei dieser Art der Modellierung von Zwei-Phasen-Strömungen wird ein randangepasstes Gitter verwendet. Die Lage der freien Wasseroberfläche wird entweder durch Marker oder eine Höhenfunktion bestimmt und das Rechengitter entsprechend der Form der freien Wasseroberfläche in jedem Zeitschritt angepasst. Die Höhenfunktion beschreibt die Höhe der freien Wasseroberfläche oberhalb einer Ausgangsposition, während die Marker die expliziten Koordinaten der Oberfläche wiedergibt. In beiden Fällen wird die freie Wasseroberfläche anhand der Flüssigkeitsdynamik bestimmt. Es handelt sich um eine Mischung aus der eulerschen und lagrangeschen Betrachtungsweise. Das Fluid wird nach der eulerschen Art und die Marker nach der lagrangeschen Art modelliert. Sobald es sich bei der zu berechnenden Wasseroberfläche um brechende Wellen handelt, stößt die Interfaceverfolgungsmethode an ihre Grenzen. Hier kommen Interfaceerfassungsmethoden zum Einsatz. Solange es sich jedoch um nichtbrechende Wellen handelt, kann mit der Interfaceverfolgungsmethode eine sehr gute Bestimmung der freien Wasseroberfläche erzielt werden. Für die Berechnung von Kavitationsgebieten mit Phasenübergang ist diese Art der Beschreibung von Zwei-Phasen-Strömungen jedoch ungeeignet.

#### 3.4.2 Interfaceerfassungsmethoden

Bei den Interfaceerfassungsmethoden werden im Vergleich zu den Interfaceverfolgungsmethoden keine Änderungen am Rechengitter vorgenommen. Dieses stellt einen großen Vorteil bei der Modellierung einer zeitabhängigen Verformung einer Oberfläche dar. Eine ständige Verzerrung des Gitters und die hiermit verbundene zeitaufwändige Interpolation zur Neuerstellung des Rechengitters wird vermieden. Die wichtigsten Methoden zur Bestimmung der Grenzfläche der Fluide unterschiedlicher Dichte sind die Marker-and-Cell-Methode (MAC), die Level-Set-Methode und die Volume-of-Fluid-Methode (VOF).

- Marker-and-Cell-Methode:** Bei der Marker-and-Cell-Methode (MAC) [18] werden zu Beginn der Berechnung masselose Markerpartikel im Bereich der freien Oberfläche verteilt. Diese Partikel werden nach der lagrangeschen Betrachtungsweise im Rechengebiet verfolgt und bilden die freie Wasseroberfläche. Mit dieser Methode lassen sich brechende Wellen bzw. Spritzer modellieren. Aufgrund der hohen Anzahl an Markerpartikeln ist jedoch gerade im 3D-Fall der Rechenaufwand sehr hoch, so dass diese Methode heutzutage nur noch wenig angewendet wird. Zudem ist sie für Kavitationsmodellierung unzulänglich, da kein Phasenübergang an der Grenzfläche möglich ist. In Abb. 3.5 ist die Verteilung von Markerpartikeln und die daraus entstandene Trennfläche dargestellt.

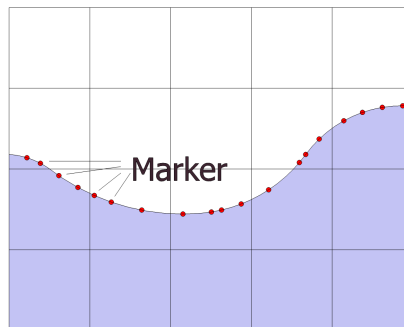


Abbildung 3.5: Beschreibung der Grenzfläche mit der Marker-and-Cell-Methode

- Level-Set-Methode:** Bei der Level-Set-Methode [35] wird die Grenzfläche zwischen zwei Fluiden durch die Nullstelle der an der Grenzfläche stetigen Level-Set-Funktion  $\phi$  definiert. Abhängig von der Lage der Zelle kann diese Funktion positive oder negative Werte annehmen. Eine Unterscheidung der getrennten Fluide erfolgt über das Vorzeichen.

$$\phi(x, (t), t) = 0 \quad (3.59)$$

Die Abb. 3.6 zeigt schematisch den Verlauf einer Level-Set-Funktion und die daraus ersichtliche Trennfläche der Fluide.

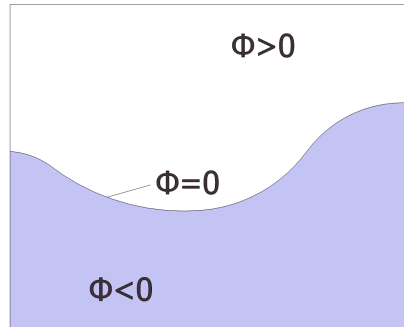


Abbildung 3.6: Beschreibung der Grenzfläche mit einer Level-Set-Funktion

An der Stelle des Dichte- und Viskositätsprungs muss zur Stabilisierung eine Glättung der Oberfläche erfolgen.

- **Volume-of-Fluid:** Bei der Volume-of-Fluid-Methode (VOF) [19] wird der Volumenanteil  $\alpha$  jeder Zelle in einer zusätzlichen Variable gespeichert. Die neue Variable  $\alpha$  beschreibt anhand folgender Formel die Strömungseigenschaften.

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{kontinuierliche Phase} \\ 0 < \alpha < 1 & \text{Übergangsphase (Grenzfläche)} \\ 1 & \text{disperse Phase} \end{cases} \quad (3.60)$$

$\alpha$  beschreibt also vereinfacht ausgedrückt den Füllstand einer Zelle. Ist eine Zelle komplett mit Wasser gefüllt so nimmt  $\alpha$  den Wert eins an und eine mit Luft gefüllte Zelle nimmt den Wert 0 an. Für die Zellen im Grenzbereich gilt jeweils der im Zellzentrum gemittelte Wert für  $\alpha$ . Die Abb. 3.7 zeigt beispielhaft den Verlauf einer freien Wasseroberfläche und die dazugehörige diskrete Variable  $\alpha$ .

1	1	1	1	1
0,9	1	1	0,9	0,3
0,1	0,5	0,5	0,1	0
0	0	0	0	0

Abbildung 3.7: Beschreibung der Grenzfläche mit der Volume-of-Fluid-Methode



Für die neu eingeführte Variable  $\alpha$  wird zusätzlich zu den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls eine Transportgleichung der Form

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) = 0 \quad (\text{Differentialform}) \quad (3.61)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha dV + \int_S \alpha \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{Integralform}) \quad (3.62)$$

gelöst. Durch die konservative Formulierung ist die Massenerhaltung garantiert. Für die Diskretisierung des konvektiven Terms werden speziell für die Erfassung von freien Wasseroberflächen entwickelte Diskretisierungsmethoden verwendet. Gute Ergebnisse zeigen hier z.B. die HRIC-Methode (High-Resolution Interface Capturing scheme) [34] oder die CICSAM-Methode (Compressible Interface Capturing for Arbitrary Meshes) [50]. Die Abb. 3.7 zeigt die Verteilung der Variablen  $\alpha$  und die daraus gemittelte Trennfläche. Diese Methode der Beschreibung von Mehrphasenströmungen hat sich im Bereich der Kavitationsmodellierung durchgesetzt.

Alle Interfaceerfassungsmethoden benötigen im Bereich der Fluidoberfläche eine ausreichend feine Gitterstruktur. Dieses setzt voraus, dass die Lage der freien Oberfläche schon vor Rechenbeginn abgeschätzt wird und der zu erwartende Bereich mit einer ausreichenden Gitterauflösung modelliert wird.

### 3.5 Kavitationsmodellierung

Die Berechnung von kavitierenden Strömungen mit einem Euler-Euler-Ansatz beruht auf einer erweiterten Volume-of-Fluid Methode. Das im Abschnitt 3.4.2 beschriebene VOF-Modell wird auf die Modellierung einer Zweiphasenströmung von Wasser und Dampf angepasst. Die Volumenfraktion  $\alpha$  wird gebildet aus dem Flüssigkeitsvolumen (Wasser) und dem Dampfvolumen (Wasserdampf) und ist wie folgt definiert:

$$\alpha = \frac{V_v}{V_v + V_l} = \frac{V_v}{V} \quad (3.63)$$

$$1 - \alpha = \frac{V_l}{V_v + V_l} = \frac{V_l}{V} \quad (3.64)$$

Die Stoffeigenschaften in jeder Zelle lassen sich aus der errechneten Volumenfraktion ableiten. Die Dichte des Wasser-Wasserdampf-Gemisches berechnet sich anhand des folgenden Zusammenhangs.

$$\rho = \alpha\rho_v + (1 - \alpha)\rho_l \quad (3.65)$$

Analog können auch weitere Stoffeigenschaften, wie z.B. die Viskosität, berechnet werden. Beide Phasen unterliegen der Massenerhaltung. Im Vergleich zur VOF-Methode ohne Phasenübergang enthält jedoch sowohl die Massenerhaltungsgleichung der dispersen Phase als auch die Massenerhaltungsgleichung der kontinuierlichen Phase einen Massenfluss, welcher die Verdampfung bzw. Kondensation beschreibt. Einflüsse auf die Verdampfung bzw. Kondensation haben sowohl Strömungs- (Druck, Geschwindigkeit) als auch Stoffgrößen (Dichte, Sättigungsdruck, Oberflächenspannung zwischen Gas- und Dampfphase). Als Bedingung für die Massenerhaltung beider Phasen gilt, dass die Summe der Verdampfungsrate und der Kondensationsrate gleich null ist.

Dampfphase:

$$\frac{\partial(\alpha\rho_v)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\rho_v u_i)}{\partial x_i} = \dot{m}_v \quad (3.66)$$

Flüssigkeitsphase:

$$\frac{\partial((1 - \alpha)\rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial((1 - \alpha)\rho_l u_i)}{\partial x_i} = \dot{m}_l \quad (3.67)$$

Gemisch aus Wasser und Wasserdampf:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.68)$$

mit

$$\dot{m}_v + \dot{m}_l = 0 \quad (3.69)$$

$\rho$  ist hier die Dichte des Gemischs und errechnet sich aus der Formel 3.65. Der Massenstrom sowohl der Verdampfung als auch der Kondensation wird modelliert durch einen Quellterm  $R$ . Dieser Quellterm  $R$  stellt die Zunahme bzw. Abnahme der Dampfphase dar. Er ist stets abhängig von der Druckdifferenz des aktuellen Drucks zum Sättigungsdruck. Zur Bestimmung der

Größe dieses Quellterms gibt es zahlreiche Ansätze. Die drei verwendeten Ansätze nach Singhal [42], Sauer [39] und Zwart [56] werden in den Kapiteln 3.5.1, 3.5.2 und 3.5.3 beschrieben. Die in Kapitel 3.4.2 vorgestellte Transportgleichung für den Volumenanteil der Dampfphase 3.61 bzw. 3.62 wird für die Kavitationsmodellierung auf der rechten Seite ergänzt durch den Quellterm  $R$ .

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) = R = R_V + R_K \quad (3.70)$$

Während bei der Berechnung von freien Wasseroberflächen scharfe Grenzflächen erwünscht sind und hierfür spezielle Differentiationsschemata verwendet werden, ist für die Kavitationsmodellierung eine Vermischung der Phasen in den Grenzflächen erwünscht. Der konvektive Term der Dampfvolumentfraktion wird lediglich mit einem Aufwind-Schema erster Ordnung diskretisiert. Bereits frühere Untersuchungen zeigen, dass diese Art der Diskretisierung eine gute Übereinstimmung mit durchgeführten Experimenten zeigt und zudem bezüglich der Stabilität die beste Wahl darstellt.

#### 3.5.1 Singhalmodell

Das Kavitationsmodell von Singhal [43],[42] aus dem Jahr 1997 beruht auf dem Ansatz, dass ein Phasenübergang dann stattfindet, wenn der Sättigungsdruck unterschritten wird. Der Phasenübergang ist proportional zur Druckdifferenz zwischen Sättigungsdruck und vorliegendem lokalen Druck. Abhängig vom lokalen Druck wird der Quellterm für die Transportgleichung des Volumenanteils wie folgt formuliert.

$$R_V = K_V \frac{\max(1.0, \sqrt{k}) (1 - \alpha)}{\sigma} \rho_l \rho_v \sqrt{\frac{2}{3} \frac{(p_v - p)}{\rho_l}} \quad (3.71)$$

$$R_K = K_K \frac{\max(1.0, \sqrt{k}) \alpha}{\sigma} \rho_l \rho_l \sqrt{\frac{2}{3} \frac{(p_v - p)}{\rho_l}} \quad (3.72)$$

mit den Konstanten  $K_{Verdampfung} = 0.02$  und  $K_{Kondensation} = 0.01$ . Diese Konstanten sind Empfehlungen von Singhal. Ebenfalls von Singhal stammt der Ansatz eine Abhängigkeit zwischen der turbulenten kinetischen Energie und dem Sättigungsdruck zu schaffen. Anhand einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion werden turbulente Druckschwankungen erfasst.

$$p'_{turb} = 0.39 \rho k \quad (3.73)$$

Die errechneten turbulenten Druckschwankungen werden vereinfacht genutzt um den Sättigungsdruck anzuheben.

$$p_{sat} = p_{sat} + \frac{p'_{turb}}{2} \quad (3.74)$$

Da der turbulente Charakter einer Strömung großen Einfluss auf das Kavitationsgebiet hat, wird aufgrund der Einfachheit der vorangegangenen Formulierung der Ansatz aus Gl. 3.74 ebenfalls für die beiden folgenden Kavitationsmodelle nach Sauer und Zwart verwendet.

#### 3.5.2 Sauermodell

Ähnlich dem Singhalmodell wird auch im Sauermodell [39] eine Transportgleichung für die Volumenfraktion  $\alpha$  gelöst. Die Quellterme im Sauermodell für die Verdampfung und Kondensation basieren auf der Blasendynamik. Aufgrund der Abhängigkeit der Quellterme von der Ansammlung vieler Blasen, die der Rayleigh-Plesset-Gleichung gehorchen, liegt kein linearer Zusammenhang zwischen Druck und Phasenübergang vor.

Die Rayleigh-Plesset-Gleichung (Gl. 3.75) beschreibt die Dynamik von Gas- bzw. Dampfblasen wie sie bei kavitierenden Strömungen auftreten. Vereinfacht betrachtet man eine kugelförmige Blase mit dem Radius  $R$  und dem Innendruck  $p_v$ , welche von einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte  $\rho_l$  umgeben ist.

$$\frac{p_B - p_\infty}{\rho_l} = \ddot{R}_b R_b + \frac{3}{2} \dot{R}_b^2 + 4\nu \frac{\dot{R}_b}{R_b} + \frac{2S}{\rho_l R_b} \quad (3.75)$$

Die Blase ist nicht im mechanischen oder thermischen Gleichgewicht mit dem umgebenden Fluid ( $\dot{R} \neq 0$ ). Zur Ausdehnung der Kavitationsblase muss der Innendruck so groß sein, dass sowohl die Oberflächenspannung als auch die Trägheit des umgebenden Fluids überwunden wird. Die Rayleigh-Plesset-Gleichung (Gl. 3.75) wird für die Bestimmung der Blasenwachstumsgeschwindigkeit im Sauermodell vereinfacht. Die Ableitungen zweiter Ordnung des Radius, die Viskositätseinflüsse sowie die Oberflächenspannung werden vernachlässigt und es ergibt sich eine vereinfachte Form, welche nur noch abhängig von der Druckdifferenz und der Dichte des umgebenden Fluids ist.

$$\dot{R}_b = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|p_B - p_\infty|}{\rho_l}} \quad (3.76)$$

Der Quellterm von Sauer lautet wie folgt:

$$R_V = \frac{4\pi n_0 R_b^2}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R_b^3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p}{\rho_l}} \quad (3.77)$$

$$R_K = \frac{4\pi n_0 R_b^2}{1 + n_0 \frac{4}{3} \pi R_b^3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p - p_v}{\rho_l}} \quad (3.78)$$

mit dem Blasenradius  $R_b$  als Funktion der Volumenfraktion  $\alpha$ .

$$R_b = \sqrt[3]{\left( \frac{\alpha}{\frac{4}{3} \pi n_0 \cdot (1 - \alpha)} \right)} \quad (3.79)$$

Die in einer Zelle vorhandene Blasenanzahl und die daraus resultierende Volumenfraktion berechnet sich wie folgt:

$$n_B = n_0 V_l = n_0 V (1 - \alpha) \quad (3.80)$$

$$\alpha = V n_B = \frac{4}{3} \pi R_b^3 n_B \quad (3.81)$$

Folgende Konstanten werden von Sauer (2000) vorgeschlagen und auch für die Berechnungen in dieser Arbeit verwendet.

Tabelle 3.4: Modellkonstanten des Sauermodells

$R_b$	$R_b$	$R_0$	$R_{max}$	$n_0$
$\Delta p > 0$	$\Delta p < 0$			
$\alpha > 0$	$\alpha > 0$			
$10^{-8}m$	$R_{max}$	$3 \cdot 10^{-5}m$	$5 \cdot 10^{-4}m$	$10^8 m^{-3}$

### 3.5.3 Zwartmodell

Das Zwartmodell [56] ist eine Erweiterung des in Kap. 3.5.2 beschriebenen Kavitationsmodells nach Sauer. Zwart erweitert dieses Modell mit der Begründung, dass im Sauermodell keine Interaktion zwischen Kavitationsblasen stattfindet. Dieser Ansatz ist laut Zwart nur für den

Kavitationsbeginn zulässig, wenn die Kavitationsblase sich aus einem Keim bildet. Demzufolge muss sich die Blasendichte verringern, wenn die Volumenfraktion zunimmt. Die Umsetzung dieses Ansatzes erfolgt durch die Ersetzung des Dampfvolumentanteils durch  $r_{nuc}(1 - \alpha)$  während der Verdampfung. Die Quellterme für die Verdampfung und die Kondensation ergeben sich nach Zwart wie folgt:

$$R_V = K_V \frac{3r_{nuc}(1 - \alpha)\rho_v}{R_b} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p}{\rho_l}} \quad (3.82)$$

$$R_K = K_K \frac{3\alpha\rho_v}{R_b} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p - p_v}{\rho_l}} \quad (3.83)$$

Die folgenden Parameter zeigen für das Zwartmodell gute Ergebnisse.

Tabelle 3.5: Modellkonstanten des Zwartmodells

$R_b$	$r_{nuc}$	$K_V$	$K_K$
$10^{-6}m$	$5 \cdot 10^{-4}$	50.0	0.04

$K_V$  und  $K_K$  sind zusätzlich eingeführte Konstanten zur Kalibrierung des Modells, welche anhand von Testrechnungen ermittelt wurden.

## 4 Numerische Verfahren

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wurde auf die Programmierplattformen MOUSE und FreSCo<sup>+</sup> zurückgegriffen. Beide Verfahren wurden zur Lösung der Erhaltungsgleichungen auf der Basis des Finite-Volumen-Verfahrens für beliebige Gittertypen entwickelt und werden an der Universität Duisburg-Essen bzw. der Technischen Universität Hamburg-Harburg stets weiterentwickelt. Es folgt eine kurze Beschreibung der verwendeten Lösungsalgorithmen und der verwendeten Rechengitter.

### 4.1 Verwendete Lösungsalgorithmen

#### 4.1.1 MOUSE

MOUSE ist eine objektoriente Programmierplattform, welche am Institut für Verbrennung und Gasdynamik der Universität Duisburg-Essen seit 1996 entwickelt und fortlaufend auch am Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme e.V. (DST, ehemals VBD) genutzt und erweitert wird. Es handelt sich um eine in C++ programmierte objektorientierte Bibliothek. Erhaltungsgleichungen werden auf unstrukturierten oder hybriden Gittern in knotenzentrierter Anordnung diskretisiert und können nach dem Finite-Volumen-Verfahren gelöst werden. Für die Berechnung des Drucks kommt eine Fractional-Step-Methode bzw. die Methode der künstlichen Kompressibilität zum Einsatz. Zeitgenaue Berechnungen werden unter Verwendung eines dualen Zeitschrittverfahrens mit laufender Kontrolle der Massenerhaltung gelöst. Für die Formulierung der konvektiven Terme wird ein MUSCL-Verfahren (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) 2. Ordnung verwendet. Zur 3D-Simulation von bewegten und sich relativ zueinander bewegenden Rechengittern steht ein Verfahren zur Berechnung von Overset-Gittern zur Verfügung. Freie Wasseroberflächen können nach dem Ansatz der Interfaceerfassungsmethoden sowohl über eine Level-Set-Funktion als auch über einen Volume-of-Fluid (VOF) Ansatz gelöst werden.

#### 4.1.2 FreSCo<sup>+</sup>

FreSCo (The Free-Surface Code) ist ein in FORTRAN programmiertes Gemeinschaftsprojekt der Technischen Universität Hamburg-Harburg (TUHH, Institut für Fluidodynamik und Schiffstheorie, M-8), der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt (HSVA) und des Maritime Research Institute Netherlands (MARIN). Die verwendete Bibliothek FreSCo<sup>+</sup> ist eine Version von FreSCo mit erweiterten Möglichkeiten.

Die Bibliothek basiert auf einem zellzentrierten Ansatz und ist sowohl für strukturierte als auch unstrukturierte Netze gültig. Der implizite Löser hat eine Genauigkeit 2. Ordnung in Raum und Zeit. Die Formulierung der konvektiven Terme sind maximal 2. Ordnung mit einer quadratischen Aufwind-Interpolation (QUICK). Die Berechnung erfolgt mit einem Druckkorrekturverfahren (SIMPLE). Die Entkopplung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes wird durch eine künstliche Ableitung des Drucks 4. Ordnung in der Kontinuitätsgleichung erreicht. Die Berechnung turbulenter Strömungen erfolgen mit einem der zahlreichen Wirbelviskositätsmodelle. Strömungen mit freien Wasseroberflächen können mit Interfaceerfassungsmethoden sowohl mit einer Level-Set-Funktion beschrieben werden als auch mit einer Volumenfraktion (VOF). Der VOF-Ansatz kann in Verbindung mit unterschiedlichen Ansätzen für den Massentransfer genutzt werden um kavitierende Strömungen nach dem Euler-Euler-Ansatz zu simulieren.

### 4.2 Rechengitter

Um ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Strömungen nach dem eulerschem Ansatz anzuwenden ist eine Teilung des kontinuierlichen Rechengebiets in eine endliche Anzahl von Teilvolumina notwendig. Die Werte der gesuchten unbekannten Variablen werden dann in den diskreten Punkten der Kontrollvolumina bestimmt. Diese Punkte können sowohl Volumenzentren als auch Gitterpunkte sein. Man spricht bei der Erstellung der Kontrollvolumina i.A. von der Gittergenerierung. Die Gittergenerierung kann in praktischen Anwendungen im schiffstechnischen Umfeld aufgrund komplexer Geometrien, wie z.B. der Fall bei High-Skew-Propellern, ein sehr zeitaufwendiger Arbeitsschritt sein.

An das Gitter für eine numerische Berechnung werden bestimmte Anforderungen gestellt, ohne die eine Strömungsberechnung nicht möglich ist oder aber zu unphysikalischen Ergebnissen führt. Zudem stellt jedes Rechengitter einen Kompromiss zwischen Effizienz und Rechengenauigkeit dar. Zum einen sollen nur eine begrenzte Anzahl von Kontrollvolumina erstellt werden, da eine hohe Anzahl die Rechenzeit erhöht, zum anderen muss in Bereichen z.B. hoher Gradienten eine ausreichende Anzahl an Kontrollvolumina vorhanden sein, um die Strömungsverhältnisse ausreichend genau zu erfassen. Bezüglich der Effizienz der Erstellung eines Rechengitters kann man zwischen unterschiedlichen Ansätzen unterscheiden. Neben einem groben Überblick über Gitterarten und -strukturen werden in Kap. 4.2.2.3 die beiden genutzten Gittertypen genauer beschrieben. Genauere Informationen zu allen Gitterarten und -strukturen sind z.B. in [13] oder [40] zu finden.



### 4.2.1 Gitterarten

Rechengitter lassen sich in zwei Arten unterteilen:

- kartesische Gitter ohne Körperanpassung
- körperangepasste Gitter

Kartesische Gitter stellen ein ideales Rechengitter dar. Es besteht aus gleichseitigen Hexaedern. Zur Abbildung der Geometrien werden zwei unterschiedliche Techniken verwendet. Zum einen kann man die Geometrie durch Treppenstufen abbilden oder aber es werden die Zellen im Randgebiet durch die Geometrie überlagert und es erfolgt eine besondere Behandlung dieser Zellen. Im ersten Fall muss eine ausreichende Auflösung vorhanden sein, damit kein Einfluss der Stufen auf die Abbildung der Grenzschicht eintritt.

Bei körperangepassten Gittern werden die im Randbereich liegenden Zellen verformt, so dass eine Abbildung der Geometrie durch Zellkanten approximiert wird. Mit dieser Gitterart ist es möglich komplexe Geometrien gut abzubilden. Die Verzerrung der Gitterzellen stellt im Vergleich zum kartesischen Gitter einen höheren Rechenaufwand dar und kann in ungünstigen Fällen zur Divergenz des Rechenverfahrens führen.

Beispiele für ein randangepasstes Gitter und ein kartesisches Gitter ohne Randanpassung sind in zweidimensionaler Darstellung in der Abb. 4.1 zu sehen.

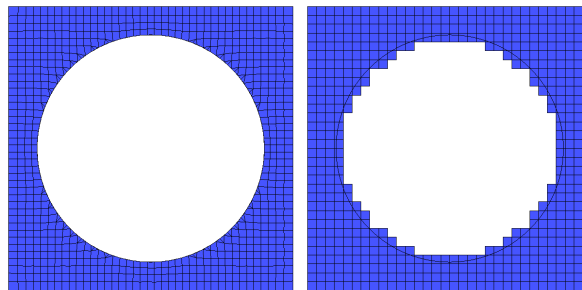


Abbildung 4.1: Randangepasstes Gitter (links) und kartesisches Gitter ohne Randanpassung (rechts)

Deutlich zu sehen ist die Verzerrung der Zellen am kreisrunden Ausschnitt im rechten Teil der Abbildung. Im ingenieurtechnischen Umfeld wie auch in dieser Arbeit werden ausschließlich randangepasste Gitter verwendet.

### 4.2.2 Gitterstrukturen

Gitter numerischer Berechnungen lassen sich bezüglich der logischen Anordnung der Kontrollvolumina in zwei Arten von Strukturen unterteilen.

- unstrukturierte Gitter
- strukturierte Gitter

Häufig wird die Struktur eines Gitters in Verbindung gebracht mit der Art der verwendeten Zellen. So wird ein Tetraeder-Gitter oftmals als unstrukturiertes Gitter bezeichnet und ein Hexaeder-Gitter als strukturiertes Gitter. Diese Aussage ist jedoch nicht allgemein gültig. Es existieren ebenfalls Mischformen von Gitterarten.

#### 4.2.2.1 Unstrukturierte Gitter

Unstrukturierte Gitter zeigen keine Regelmäßigkeiten. Die Anordnung der Kontrollvolumina und die damit verbundene Verteilung der Gitterpunkte ist vollkommen unregelmäßig im Raum. Unstrukturierte Gitter haben den großen Vorteil, dass die Anordnung der Gitterpunkte im Randgebiet sehr flexibel ist und sich somit komplizierte Geometrien mit, im Vergleich zu strukturierten Gittern, einfachem Aufwand automatisch erstellen lassen. Ebenfalls lassen sich lokale Verfeinerungen einfach umsetzen. Unstrukturierte Gitter haben aufgrund der Notwendigkeit der Speicherung der Koordinaten der Gitterpunkte und zusätzlich aller Nachbarschaftsbeziehungen einen hohen Speicherbedarf. Zudem wird der Lösungsprozess durch den ständigen Zugriff auf die abgespeicherten Nachbarschaftsbeziehungen deutlich verlangsamt, was zu höheren Rechenzeiten führt. Die Abb. 4.2 zeigt ein typisches unstrukturiertes Tetraeder-Gitter.

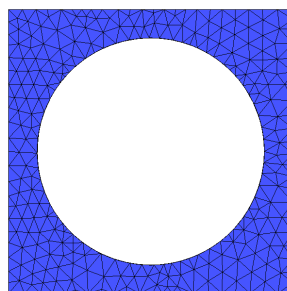


Abbildung 4.2: Randangepasstes unstrukturiertes Tetraeder-Gitter

#### 4.2.2.2 Strukturierte Gitter

Gitter mit einer nach einem festen Muster vorgegebenen regelmäßigen Anordnung der Gitterzellen werden als strukturierte Gitter bezeichnet. Nachbarschaftsbeziehungen müssen nicht abgespeichert werden, sondern können aus der Struktur des Gitters ausgelesen werden. Es müssen somit lediglich die Koordinaten der Gitterpunkte abgespeichert werden. Es erfolgt eine schnelle Abarbeitung, da benachbarte Elemente in der Punktmatrix auch benachbarte Elemente im Rechengitter darstellen. Strukturierte Gitter sind nicht gleichzusetzen mit kartesischen Gittern, denn strukturierte Gitter können sowohl krummlinig sein oder auch aus anderen Elementtypen als Hexaedern bestehen. Die Abb. 4.3 zeigt typische Beispiele strukturierter Gitter.

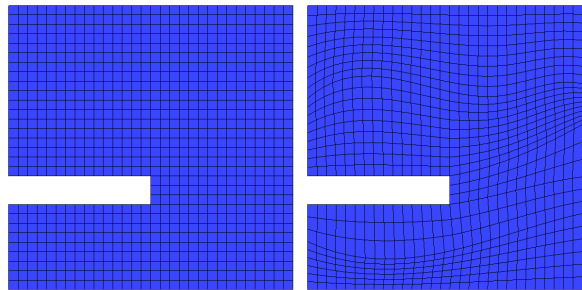


Abbildung 4.3: Strukturiertes kartesisches Hexaeder-Gitter (links) und strukturiertes krummliniges Hexaeder-Gitter (rechts)

#### 4.2.2.3 Mischformen

Mischformen bilden einen wichtigen Bestandteil von Gitterarten und sind in der Ingenieurpraxis weit verbreitet. Durch die Verwendung von Mischformen werden die Vorteile von unstrukturierten und strukturierten Gittern verknüpft. Zwei Arten von Mischformen sind blockstrukturierte und hierarchisch strukturierte Gitter.

Ein blockstrukturiertes Gitter ist ein aus Blöcken zusammengesetztes Rechengitter und wurde bei Berechnungen mit dem Lösungsalgorithmus MOUSE eingesetzt. Es handelt sich bei dieser Art von Gittern um ein global unstrukturiertes Gitter. Es gehört jedoch zu der Art der Mischformen, da jeder Block lokal ein strukturiertes Gitter enthält. Diese Art der Vernetzung kommt in zahlreichen kommerziellen Lösern zum Einsatz. Komplexe Geometrien können ohne Einschränkung abgebildet werden. Es kann blockweise ein strukturierter Lösungsprozess abgearbeitet werden. Netzverfeinerungen können nur blockweise vorgenommen werden. Es

muss dann eine besondere Betrachtung der Übergänge an den Blockgrenzen erfolgen, da hier z.B. hängende Knoten vorhanden sein können.

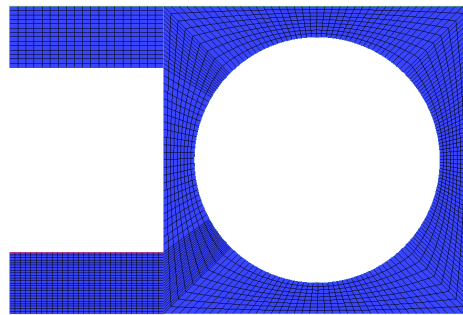


Abbildung 4.4: Blockstrukturiertes Hexaeder-Gitter

Die Abb. 4.4 zeigt ein blockstrukturiertes Gitter. Dieses Gitter setzt sich zusammen aus acht Blöcken. Zwei Blöcke befinden sich an den linken quaderförmigen Enden des Rechengebiets. Die übrigen sechs Blöcke befinden sich in dem quadratischen Teil des Rechengebiets mit dem kreisrunden Ausschnitt. Die in dieser Arbeit genutzten blockstrukturierten Gitter wurden mit dem kommerziellen Programm ICEM CFD Hexa der Firma ANSYS erstellt. Eine genauere Beschreibung der verwendeten Netze und Vernetzungsstrategien werden im Kapitel 6 beschrieben.

Hierarchisch strukturierte Gitter wurde zumeist bei Verwendung des Lösungsalgorithmus  $\text{FreSCo}^+$  verwendet. Ausgangspunkt eines hierarchisch strukturierten Gitters ist ein strukturiertes Gitter. In notwendigen Bereichen wird das Gitter ebenfalls lokal strukturiert verfeinert. Eine lokale Verfeinerung wird durch hängende Knoten erreicht. In den lokal verfeinerten Gebieten können wiederum strukturierte Lösungsverfahren zum Einsatz kommen. Ähnlich den unstrukturierten Gittern ist eine automatische Vernetzung, bzw. Verfeinerung, einfach umzusetzen. Die numerische Genauigkeit sinkt jedoch an den Übergängen aufgrund der durch die hängenden Knoten notwendigen Interpolation. Die Abb. 4.5 zeigt ein hierarchisch strukturiertes Gitter. Deutlich zu erkennen sind die Übergänge mit hängenden Knoten vom fein aufgelösten Bereich des kreisförmigen Ausschnitts zum restlichen Bereich des Rechengebiets.

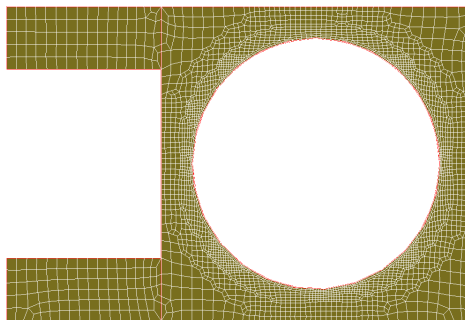


Abbildung 4.5: Hierarchisch strukturiertes Hexaeder-Gitter

Hierarchisch strukturierte Netze wurden in dieser Arbeit nur in Verbindung mit dem Finite-Volumen-Code FreSCo genutzt. Dieser Typ von Netzen wurde mit dem kommerziellen Programm HEXPRESS<sup>TM</sup> der Firma NUMECA erstellt.

## 5 Wirbeldetektion in Kombination mit Vorticity Confinement

### 5.1 Vorticity Confinement

Ziel der Modellierung wirbelbehafteter Strömungen ist das rechnerische Erfassen des Wirbelverlaufs und der Wirbelstärke ähnlich der Wirbelausbreitung in realen Strömungen. Aufgrund der numerischen Approximation der konvektiven Flüsse tendieren Wirbel in der Simulation zu einer starken Dissipation. Eine Möglichkeit diese Dissipation zu verringern ist die Anwendung einer Vorticity Confinement Formulierung. Unter Vorticity Confinement versteht man das Einbringen einer antidissipativ wirkenden Kraft in Bereichen hoher Wirbelstärke. Es ermöglicht das künstliche Aufrechterhalten von Wirbelstärke auch auf nicht ausreichend diskretisierten Netzen.

#### 5.1.1 Grundlagen des Wirbeltransports

Die Wirbeltransportgleichung für die Wirbelstärke  $\vec{\omega}$  für inkompressible Strömungen wird gebildet aus der Rotation der inkompressiblen Impulsgleichung für  $\vec{u}$  und lautet wie folgt:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (5.1)$$

mit der Wirbelstärke  $\vec{\omega}$  als Rotation des vektoriellen Geschwindigkeitsfeldes

$$\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T = \nabla \times \vec{u} \quad (5.2)$$

dem kartesischen Differential-Operator  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$

und der kinematischen Viskosität  $\nu$ .

Die linke Seite der Wirbeltransportgleichung setzt sich zusammen aus der zeitlichen Änderung der Wirbelstärke und der Konvektion von Wirbelstärke. Der Konvektionsteil der Gleichung beschreibt den Transport der Wirbelstärke durch das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}$ . Wirbelstärke wird hier weder vernichtet noch erzeugt sondern lediglich umverteilt. Die rechte Seite der Gleichung bildet die Wirbelstreckung und die Diffusion der Wirbelstärke. Die Wirbelstreckung bewirkt eine Erhöhung des Wirbelstärkevektors und somit eine Erhöhung der Gesamtwirbelstärke. Der letzte Term auf der rechten Seite zeigt den Zusammenhang der Diffusion von

Wirbelstärke und der Viskosität. Die Viskosität ist hier ein Maß für die Diffusion obwohl diese auch Grund für die Entstehung von Wirbelstärke sein kann. Während die Viskosität in dieser Gleichung üblich als Stoffgröße verstanden wird, so kann man diesen Teil der Gleichung auch direkt auf die numerische Diskretisierung übertragen. Wird ein Gebiet mit einer unzureichenden Anzahl an Rechenpunkten diskretisiert, steigt die numerische Dissipation und somit die Dissipation der Wirbelstärke ähnlich der Erhöhung der Viskosität in der Wirbeltransportgleichung.

### 5.1.2 Entwicklung des Vorticity Confinement

Die zugrundeliegende Technik des Vorticity Confinements besteht aus der Erweiterung der Impulsgleichung mit einem Kraftterm auf der rechten Seite der Gleichung. Die Massen- und Impulserhaltungsgleichungen lauten dann

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} - \varepsilon \vec{s} \quad (5.4)$$

mit dem Confinementterm  $\vec{s} = [s_x, s_y, s_z]^T$

und dem benutzerabhängigen Parameter  $\varepsilon$ .

Eine der ersten in der Literatur zu findenden Formulierungen des Terms  $\vec{s}$  stammt von Steinhoff et al. aus dem Jahre 1994 [47] und lautet

$$\vec{s} = \hat{n} \times \vec{\omega} \quad (5.5)$$

und

$$\hat{n} = \frac{\nabla |\vec{\omega}|}{|\nabla |\vec{\omega}||} \quad (5.6)$$

Die Vektoren  $\hat{n}$  und  $\vec{\omega}$  bestimmen die Richtung der einzubringenden Kraft.  $\hat{n}$  zeigt vom Bereich eines niedrigen Wirbelstärkengradienten zum Bereich höherer Wirbelstärkengradienten und somit direkt zum Wirbelkern (siehe Abb. 5.1). Der Kraftterm  $\vec{s}$  transportiert Wirbelstärke in den Bereich des Wirbelkerns. Die Stärke der einzubringenden Kraft ist allein abhängig vom Gradient der Wirbelstärke und vom benutzerabhängigen Parameter  $\varepsilon$ . Die Dimensionsanalyse

von Gl.5.5 liefert die Dimension einer Geschwindigkeit für den Parameter  $\varepsilon$ . Dieses führt zu einer Unbeständigkeit des Parameters bei unterschiedlichen Problemstellungen.

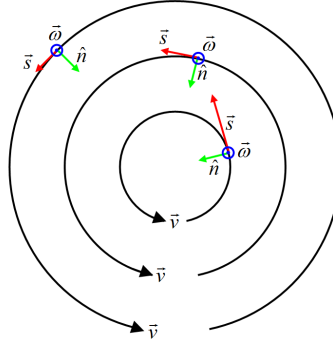


Abbildung 5.1: Vorticity Confinement - schematische Darstellung

Diese Formulierung wurde in den letzten Jahren zahlreich getestet und weiterentwickelt wie z.B. durch Wang et al. [53] 1995 durch die Umströmung eines Körpers. 2001 wurden Berechnungen von Wenren et al. [54] veröffentlicht zur Umströmung von Helikopterrotoren unter Verwendung der Vorticity Confinement Technik. Dietz und Wenren [11] folgten mit Berechnungen zur Umströmung eines Zylinders bzw. Würfels, der Umströmung eines VW Golf und der Umströmung eines Schiffs mit einem Helikopter (vereinfachte Simulation des Rotors durch eine Actuator Disk) an Bord. Murayama und Nakahashi [33] nutzen diese Vorticity Confinement Methode 2001 zur Berechnung der inkompressiblen Strömung um einen Delta-Tragflügel und einen rechteckigen NACA0012-Tragflügel in Kombination mit einem unstrukturierten Netz, adaptiver Verfeinerung und einem Eingleichungs-Turbulenzmodell (Goldberg-Ramakrishnan [49]). Diese Arbeiten zeigen zum Teil sehr gute Ergebnisse unter Verwendung von Vorticity Confinement. Es kann eine deutlich geringere Dissipation von Wirbeln erreicht werden. Die Ergebnisse zeigen jedoch auch die unerwünschte Beeinflussung der Druckbeiwerte durch Vorticity Confinement und nicht physikalische Strömungen durch einen zu hoch gewählten Parameter  $\varepsilon$ . Ein zu hoch gewählter Parameter  $\varepsilon$  führt zur Entstehung neuer Wirbel. Entgegen einer erwarteten Dissipation von Wirbelstärke zeigt sich bei einem zu hohen  $\varepsilon$  ein deutlicher Anstieg dieser und die Neubildung von Wirbeln.

2001 folgte zunächst eine Überarbeitung der Formulierung des Kraftterms  $\vec{s}$  nach Fedkiw et al. [12]. Fedkiw erweiterte den Ausgangsterm nach Steinhoff mit einem netzabhängigen Parameter  $h$ .  $\varepsilon$  bleibt durch diese Formulierung weiterhin dimensionsbehaftet, ist jedoch durch den Parameter  $h$  linear abhängig von der Zellgröße.

$$\varepsilon = \varepsilon_h \cdot h \quad (5.7)$$



Eine weitere Überarbeitung der Ausgangsformulierung nach Steinhoff erfolgte 2002 durch Löhner et al. [30]. Der überarbeitete Confinementterm lautet

$$\mathbf{s} = \vec{h}^2 \nabla |\vec{\omega}| \times \vec{\omega} \quad (5.8)$$

mit der charakteristischen Länge

$$\vec{h} = h \cdot \frac{\nabla |\vec{\omega}|}{|\nabla |\vec{\omega}||} \quad (5.9)$$

Als zusätzliche Abhängigkeit für die Bestimmung des Vorticity Confinements wurde eine charakteristische Länge  $h$  in Richtung von  $\nabla |\vec{\omega}|$  einbezogen. Die in der grundlegenden Formulierung vorhandene Konstante  $\varepsilon$  wird durch diese Formulierung von der Dimension einer Geschwindigkeit zu einer dimensionslosen Konstante. Zudem kann als zusätzliche Option der Bereich der hoch aufgelösten Grenzschicht ausgeschlossen werden. In diesem Bereich ist Vorticity Confinement unerwünscht und führt zu numerischen Instabilitäten. Der Ausschluss erfolgt über eine Formulierung auf der Basis einer mit der Wirbelstärke bestimmten lokalen Reynoldszahl.

$$h_v = \min(1, Re_h) \cdot h \quad (5.10)$$

mit der lokalen Reynoldszahl

$$Re_h = \frac{\rho \vec{u} h}{\eta} \quad (5.11)$$

Alternativen zur Formulierung der lokalen Reynoldszahl auf der Basis der im Vorticity Confinement verwendeten Terme sind

$$Re_{\vec{\omega},h} = \frac{\rho |\Delta \vec{u}| h}{\eta}; \quad Re_{\vec{\omega},h} = \frac{\rho |\vec{\omega}| h^2}{\eta}; \quad Re_{\vec{\omega},h} = \frac{\rho |\nabla |\vec{\omega}|| h^3}{\eta} \quad (5.12)$$

Die abschließende Formulierung des Vorticity Confinement Terms nach Löhner lautet somit

$$\vec{s} = g(Re_{\vec{\omega},h}) h_v^2 \nabla |\vec{\omega}| \times \vec{\omega} \quad (5.13)$$

mit der Funktion

$$g(Re_{\vec{\omega},h}) = \max \left[ 0, \min \left[ 1, \frac{Re_{\vec{\omega},h}^0 - Re_{\vec{\omega},h}^1}{Re_{\vec{\omega},h}^1 - Re_{\vec{\omega},h}^0} \right] \right] \quad (5.14)$$

als Schalter für die Grenzsicht.

Robinson [37] erarbeitete 2004 ebenfalls eine Formulierung mit dem Ziel, den Parameter  $\varepsilon$  dimensionslos zu gestalten. Betrachtet man den von Steinhoff aufgestellten Term und klammert aus diesem die Wirbelstärke  $\vec{\omega}$  aus, so erhält man eine zweigeteilte Formulierung mit einem Maß der Stärke der einzubringenden Volumenkraft und einem richtungsweisenden Teil.

$$\vec{s} = |\vec{\omega}| \left[ \frac{\nabla |\vec{\omega}|}{|\nabla |\vec{\omega}||} \times \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \right] \quad (5.15)$$

Der richtungsweisende Teil befindet sich in der eckigen Klammer und ausserhalb der Klammer befindet sich der Term für die Stärke der einzubringenden Kraft. Der Parameter  $\varepsilon$  hat hier noch die Einheit einer Geschwindigkeit. Um den Parameter  $\varepsilon$  wie zuvor zu einer dimensionslosen Konstante werden zu lassen, wurde von Robinson et al. [37] der Vorticity Confinement Term direkt proportional zur Helizität formuliert und lautet daraufhin wie folgt.

$$\vec{s} = |\vec{u} \cdot \vec{\omega}| \left[ \frac{\nabla |\vec{\omega}|}{|\nabla |\vec{\omega}||} \times \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \right] \quad (5.16)$$

Eine Netzabhängigkeit wie zuvor bei Steinhoff et al. ist hier nicht zu finden.

Die Vorticity Confinement Formulierungen nach Butsunorn et al. [5],[6] sind aufbauend auf den Robinson Formulierungen aus Gl. 5.15 und Gl. 5.16. Sie beinhalten eine Netzabhängigkeit in Form eines Volumenverhältnisses. Das lokale Zellvolumen  $V$  wird ins Verhältnis gesetzt zum mittleren Zellvolumen  $V_{ave}$  des gesamten Rechnernetzes.

$$\varepsilon_V \propto \left( \frac{V}{V_{ave}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.17)$$

Da häufig bei RANS-Berechnungen die Unterschiede von größter zu kleinster Zelle sehr groß sind und somit das Volumenverhältnis in vielen Bereichen annähernd null wird, wurde von Butsunorn et al. die Einführung des Logarithmus für den Netzparameter  $\varepsilon_V$  vorgeschlagen. Die Vorticity Confinement Formulierungen lauten daraufhin wie folgt:

$$\varepsilon_V \propto \left[ 1 + \log_{10} \left( 1 + \frac{V}{V_{ave}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (5.18)$$

$$\vec{s} = |\vec{u}| \left[ 1 + \log_{10} \left( 1 + \frac{V}{V_{ave}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] [(\hat{n} \times \vec{\omega})] \quad (5.19)$$

$$\vec{s} = |\vec{u} \cdot \vec{\omega}| \left[ 1 + \log_{10} \left( 1 + \frac{V}{V_{ave}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \left[ \left( \hat{n} \times \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \right) \right] \quad (5.20)$$

Ähnlich wie bei Robinson zuvor gibt es bei Butsunorn zwei unterschiedliche Formulierungen für die Stärke der einzubringenden Kraft. In Gl. 5.19 ist das Maß die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  und in 5.20 ist es die Helizität.

## 5.2 Wirbeldetektion

### 5.2.1 Wirbeldetektionsalgorithmen

Wirbeldetektionsalgorithmen sind Algorithmen, welche Wirbel im Rechengebiet lokalisieren. Das Kapitel 14 ‘Detection and Vizualisation of Vortices’ im ‘Visualization Handbook’ von Hansen et al. [17] gibt einen Überblick über den aktuellen Stand existierender Wirbeldetektionsalgorithmen. Grundlegend wird unterschieden zwischen Algorithmen, welche als Ergebnis ein Gebiet als Wirbelgebiet auf Netzebene erkennen oder aber als Ergebnis eine punktbasierte Linie, im Idealfall die Wirbelkernlinie, haben. Methoden, welche als Ergebnis eine Netzregion liefern, sind oftmals einfacher zu implementieren und mit geringerem Rechenaufwand verbunden. Linienbasierte Methoden hingegen sind besser geeignet, mehrere nah beieinander liegende Wirbel zu erkennen und auch zu unterscheiden. Dieses ist mit den gebietsbasierenden Methoden nahezu nicht möglich.

Ein weiterer Unterschied liegt in der Erfassung von Wirbeln anhand lokaler oder globaler Variablen. Methoden werden als lokale Methoden bezeichnet, wenn nur Variablen benachbarter Zellen abgefragt werden. Globale Methoden benötigen hingegen Informationen aller globalen Zellvariablen. Globale Methoden sind häufig rechenintensiver.

Im folgenden werden gängige Verfahren der Wirbelidentifikation vorgestellt.

### 5.2.2 Helizitäts-Verfahren

Das Helizitäts-Verfahren wurde von Levy et al. [27] vorgestellt unter der Nutzung der normierten Helizität welche wie folgt definiert ist:

$$H_n = \frac{\vec{u} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{u}| |\vec{\omega}|} \quad (5.21)$$

Der Skalar  $H_n$  beschreibt den Kosinus des Winkel der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  und der zugehörigen Wirbelstärke  $\vec{\omega}$ . Als Annahme wurde getroffen, dass in der Nähe von Wirbelkernen der Winkel zwischen Geschwindigkeitsvektor und Wirbelstärkenvektor gering ist. Für den Grenzfall  $\vec{u} \parallel \vec{\omega}$  ist  $H_n = \pm 1$ . Die durch diesen Punkt verlaufende Stromlinie ist nicht gekrümmt und dieser Punkt stellt somit einen Teil der Wirbelkernlinie dar. Anhand des Vorzeichens von  $H_n$  kann die Drehrichtung des Wirbels bestimmt werden.

### 5.2.3 Q-Verfahren

Das Q Verfahren von Hunt et al. [20] nutzen den Tensor des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{J} = \nabla \vec{u}$  zur Wirbeldetektion. Als Indiz für das Vorliegen einer wirbelbehafteten Region wird die zweite Invariante von  $\mathbf{J}$  betrachtet.

$$Q = \frac{1}{2} (||\Omega||^2 - ||S||) \quad (5.22)$$

mit den antisymmetrischen und symmetrischen Anteilen  $\Omega$  und  $S$  des Geschwindigkeitsgradiententensors  $\mathbf{J}$ .

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( (\nabla \vec{u})^T - \nabla \vec{u} \right) \quad (5.23)$$

$$S = \frac{1}{2} \left( (\nabla \vec{u})^T + \nabla \vec{u} \right) \quad (5.24)$$

Für  $Q > 0$  überwiegt in der Strömung die Rotation gegenüber der Scherung und wird somit als Kriterium für die Wirbelidentifikation herangezogen.

### 5.2.4 $\Delta$ -Verfahren

Dallmann [10], Vollmers et al. [52] und Chong et al. [8] nutzen ebenfalls den Tensor des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{J} = \nabla \vec{u}$  zur Wirbeldetektion. Der Geschwindigkeitsgradiententensor hat komplexe Eigenwerte, wenn geschlossene oder spiralförmige Stromlinien in einem lokalen Bezugssystem vorliegen. Die charakteristische Gleichung der Eigenwerte von  $\mathbf{J}$  ist

$$\lambda^3 + Q\lambda - R = 0 \quad (5.25)$$

mit den zweiten und dritten Invarianten  $Q$  und  $R$  von  $\mathbf{J}$ .  $Q$  ist bereits aus 5.22 bekannt,  $R$  ist definiert durch  $R = \text{Det}(\vec{u})$ . Komplexe Eigenwerte stellen sich ein für einen positiven Wert der Diskriminante  $\Delta$ .

$$\Delta = \left(\frac{Q}{3}\right)^3 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 > 0 \quad (5.26)$$

### 5.2.5 Lambda<sup>2</sup>-Verfahren

Jeong und Hussain [22] nutzen ebenfalls den Tensor des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{J}$  zur Detektion von Wirbeln. Es erfolgt eine Zerlegung des Tensors  $\mathbf{J}$  in den symmetrischen Teil  $\mathbf{S}$  und nicht-symmetrischen Teil  $\Omega$ .  $\mathbf{S}$  ist die Deformationsrate oder auch Strain-Rate Tensor,  $\Omega$  ist der Spin-Tensor.

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{J} + \mathbf{J}^T}{2} \quad (5.27)$$

$$\Omega = \frac{\mathbf{J} - \mathbf{J}^T}{2} \quad (5.28)$$

Jeong und Hussain definieren einen Wirbel an den Punkten, an denen  $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$  zwei negative Eigenwerte hat. Aufgrund der Eigenschaft, dass  $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$  real und symmetrisch ist, hat  $\mathbf{S}^2 + \Omega^2$  immer reale Eigenwerte. Mit  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$  ist somit  $\lambda_2$  ein Indikator für ein Wirbelgebiet.

### 5.2.6 Prädiktor-Korrektor Verfahren

Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren nach Banks und Singer [3] liefert als Ergebnis eine Wirbelkernlinie. Dieses Verfahren wird im Folgenden in Verbindung mit dem Vorticity-Confinement-Verfahren angewendet und ausführlich im Kapitel 5.3.1 beschrieben.

### 5.3 Vorticity Confinement und Wirbeldetektion

Betrachtet man die in 5.1 vorgestellten Vorticity Confinement Methoden, so wird die Stärke der einzubringenden Kraft bestimmt durch die Wirbelstärke oder die Helizität. Gerade in diesen Bereichen liegen Probleme in der Anwendung der Vorticity Confinement Methoden bei der Simulation von Strömungen mit inkompressiblen Fluiden vor. Unzählige Untersuchungen haben gezeigt, dass die Wirbelstärke gerade im Bereich der Grenzschicht deutlich über der Wirbelstärke der vom Tragflügel oder Propeller abgehenden Spitzen- bzw. Nabenwirbel liegt. In diesen Fällen werden allein in der Grenzschicht die Terme des Vorticity Confinements wirksam, während in den vom angeströmten Körper abgehenden Wirbeln die Beeinflussung durch die eingebrachten Terme so gering ist, dass nur sehr geringe Unterschiede in der Wirbelausbreitung zu erkennen sind. Zudem führt das Einbringen der Terme in der Grenzschicht zu einer verfrühten Divergenz des Rechenverfahrens sowie zu einer starken Beeinflussung der Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte. Die von Löhner et al. [30] eingeführte Funktion  $g(Re_{\bar{\omega},h})$  (Gl. 5.14) zum Ausschluss der Grenzschicht auf Basis der lokalen Reynoldszahl  $Re_{\bar{\omega},h}$  wurde bereits in Kap. 5.1.2 beschrieben. Tests mit diesem Parameter zeigten, dass zwar bestimmte Bereiche der Grenzschicht ausgeschlossen werden können, aufgrund der starken Abhängigkeit vom Rechenetz kann man diese Formulierung jedoch nicht allgemeingültig verwenden. Die Überlegungen von Butsunorn et al. [5],[6] mit der Berücksichtigung der kleinsten und größten Zelle vermindern ebenfalls global den Einfluss des Vorticity Confinement Terms in der hoch aufgelösten Grenzschicht anhand von Strömungsgrößen und Geometrieparametern. Die Grenzschicht wird jedoch weiterhin unerwünscht abgeändert und ein Einfluss auf den Auftriebs- und Reibungswiderstand bleibt erhalten.

Ziel der Kombination von Vorticity Confinement und eines Wirbeldetektionsalgorithmus ist die Beschränkung der einzubringenden Kraftterme auf die Bereiche, in denen sich ein Wirbel befindet, der von der Dimension deutlich größer ist, als die Wirbel der Grenzschicht bzw. Bereiche in denen Wirbelkavitation auftritt. Hierfür kommen z.B. bei einem Tragflügel der Spitzenwirbel und bei einem Propeller die Spitzenwirbel und der Nabenwirbel in Frage. Erweitert werden könnte es für den Propeller noch auf die an der Wurzel jedes Flügels entstehenden Wirbel, welche im Anschluss in den Nabenwirbel laufen und sich mit diesem vereinen. Durch den Wirbeldetektionsalgorithmus werden demnach Bereiche definiert, in denen der Vorticity Confinement Term auf die Strömungsgrößen Einfluss nehmen darf. Eine Beeinflussung der Grenzschicht kann somit ausgeschlossen werden. Auftriebs- und Widerstandswerte bleiben im Vergleich zur Berechnung ohne Vorticity Confinement unverändert.

Zur Bestimmung des Wirbelverlaufs wurden Verfahren verwendet, welche als Ergebnis die Wirbelkernlinie eines Wirbels anhand diskreter Punkte darstellen. Der Vorteil dieser Verfahren

liegt in der gezielten Definition der Bereiche, in denen das Vorticity-Confinement angewendet wird. Im folgenden werden diese vorgestellt.

### 5.3.1 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren nach Banks und Singer [3] basiert auf der aktuellen Druck- und Wirbelstärkenverteilung im Feld. Innerhalb von zwei Schritten wird der Wirbelkern bestimmt. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist eine Reihe von Punkten welche verbunden die Wirbelkernlinie darstellen. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Stromlinien, bleibt die mittels des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens ermittelte Wirbelkernlinie stets im Mittelpunkt des Wirbels. Stromlinien, welche den Wirbelkern durchlaufen, können diesen aufgrund des Geschwindigkeitsfeldes wieder verlassen und repräsentieren somit keine Wirbelkernlinie.

Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren lässt sich in zwei Teilbereiche unterteilen. Zunächst muss ein geeigneter Startpunkt für die Wirbelkernlinie gefunden werden, im Anschluss daran erfolgt die Ermittlung des weiteren Verlaufs des Wirbelkerns.

- **Ermittlung eines Startpunktes:** Die Ermittlung eines Startpunktes erfolgt im Bereich hinter einem angeströmten Körper, in dem ein ausgeprägter Wirbel erwartet wird. Als Kriterium für einen Startpunkt eines Wirbelkerns gilt ein niedriger Druck und eine hohe Wirbelstärke. Erst die Kombination dieser beiden Werte lässt auf die Präsenz eines Wirbels schließen, da ein niedriger Druck oder auch eine hohe Wirbelstärke nicht stets in Verbindung auftreten müssen. Als Beispiel kann hier z.B. die Anwesenheit einer Grenzschicht für eine hohe Wirbelstärke ohne notwendige Druckabsenkung oder aber die Saugseite außerhalb der Grenzschicht eines Tragflügels für einen niedrigen Druck ohne erhöhte Wirbelstärke genannt werden.

Die Umsetzung der Ermittlung eines Startpunktes für die Verfolgung von Wirbelkernlinien erfolgt benutzergesteuert. Auswertungsebenen im Rechengebiet werden, in Bereichen in denen ein Wirbel erwartet wird, durch Orts- und Normalenrichtungsvektor, idealerweise rechtwinklig zur Hauptströmungsrichtung in diesem Bereich, sowie Kantenlänge der Auswertungsebene und deren Unterteilungen definiert. In diesen Auswertungsebenen wird anhand des Druckminimums und des Wirbelstärkenmaximums der Startpunkt ermittelt. In den Ebenen wird ein kartesisches Gitternetz aufgespannt und auf den Punkten des Netzes die Druck- und Wirbelstärkenwerte aus dem Rechnetz interpoliert. Da nur die Wirbel erfasst werden sollen, in denen der Vorticity Confinement Term eingebracht werden soll, kann anhand der benutzergesteuerten Lage, Ausrichtung und Größe der Suchebene für den Startpunkt eine präzise Vorauswahl getroffen werden. Für jede Auswertungsebene gibt es nur einen Startpunkt. Eine Abschätzung vor-

ab bezüglich der Referenzwerte für ein Druckminimum und Wirbelstärkenmaximum, welche für eine globale Suche nach möglichen Startpunkten notwendig ist, entfällt. In der Praxis hat es sich als vorteilhaft herausgestellt die Suche nach dem Startpunkt für die Wirbelverfolgung nicht im Bereich der Wirbelentstehung, wie z.B. der Flügelspitze, durchzuführen, sondern in den Bereichen stromabwärts des angeströmten Körpers in denen sich der Wirbel bereits ausgebildet hat. Von diesem Punkt an wird der Wirbel sowohl stromauf- als auch stromabwärts verfolgt.

- **Verfolgung der Wirbelkernlinie:** Die Verfolgung der Wirbelkernlinie mit dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren ist ebenfalls in zwei Schritte aufgeteilt. In einen Prädiktor-Schritt und einen darauf folgenden Korrektor-Schritt. Der Prädiktor-Schritt entspricht einer Euler-Integration entlang des Vektors der Wirbelstärke bzw. analog in negative Wirbelstärkenrichtung für einen Prädiktor-Schritt entgegen der Strömungsrichtung. Es wird angenommen, dass sich der zu vorhersagende Wirbelkern in einem Bereich auf der Linie des Vektors der absoluten Wirbelstärke befindet. Da diese Annahme in den meisten Fällen nur angenähert zutrifft, muss ein Korrektor-Schritt erfolgen. Die Stützstelle der Euler-Integration ist begrenzt durch die Zellgröße im Bereich der Integration. Eine Integration erfolgt somit in Abständen ähnlich der Gitterauflösung. Dieses erlaubt ebenfalls stark gekrümmte Wirbel zu verfolgen und erhöht zudem die Genauigkeit des Prädiktor-Schritts.

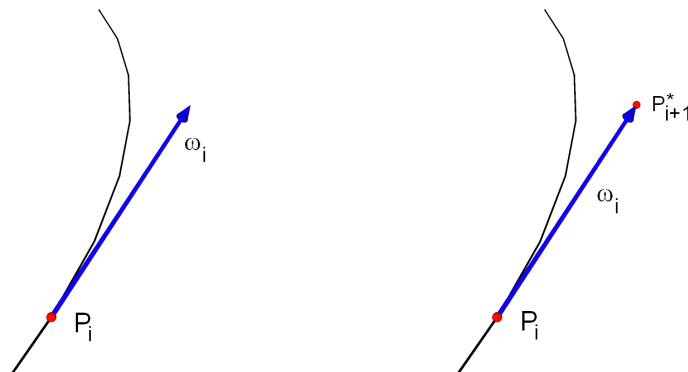


Abbildung 5.2: Prädiktor-Schritt

In Abb. 5.2 ist schematisch der Ablauf des Prädiktor-Schritts dargestellt. Im linken Teil des Bildes ist der Ausgangspunkt  $P_i$  mit dem entsprechenden Vektor der Wirbelstärke  $\vec{\omega}_i$  des Ausgangspunktes zu sehen. Im anschließenden rechten Teil des Bildes ist der vorhergesagte Punkt  $P_{i+1}^*$  nach der Integration zu sehen.

Mit dem Korrektor-Schritt werden die Koordinaten des Punktes  $P_{i+1}^*$  auf Basis des Drucks korrigiert. Hierfür wird in einer Auswertungsebene durch den vorhergesagten



Punkt  $P_{i+1}^*$  und dem Vektor der Wirbelstärke  $\vec{\omega}_{i+1}^*$  im vorhergesagten Punkt als Normalenvektor der Auswertungsebene das Druckminimum bestimmt. Unter der Annahme, dass der Wirbelkern durch ein Druckminimum repräsentiert wird, erhält man durch den Korrektor-Schritt den Wirbelkern.

Die Korrektur nach dem Druckminimum ist nur gültig für nicht kavitierende Strömungen. Wird ein Kavitationsgebiet mit einem in Kap. 3.5 beschriebenen Verfahren modelliert, sinkt der Druck im Kavitationsgebiet nur geringfügig unter den Dampfdruck des Fluids ab. Der Druckgradient nimmt deutlich ab, und der gesamte Querschnitt des kavitierenden Wirbels befindet sich auf annähernd gleichem Druckniveau. Als Abhilfe kann hier der Korrektor-Schritt nach dem Maximum des Betrags der Wirbelstärke durchgeführt werden. Hier ist jedoch anzumerken, dass das Maximum der Wirbelstärke nicht im Wirbelzentrum liegen muss. Es handelt sich hier nur um eine Näherung für kavitierende Strömungen. Ein alternatives Korrektor-Verfahren welches sowohl für kavitierende als auch für nicht kavitierende Wirbel ohne Einschränkungen nutzbar ist, ist das in Kap. 5.3.2 vorgestellte Vortfind-Verfahren.

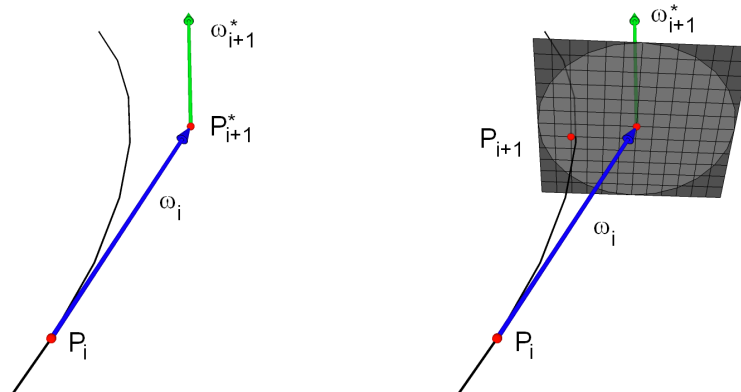


Abbildung 5.3: Korrektor-Schritt

In Abb. 5.3 ist noch einmal schematisch der Korrektor-Schritt dargestellt. Im linken Teil des Bildes ist der Ausgangspunkt des Korrektorschritts  $P_{i+1}^*$  mit der zugehörigen Wirbelstärke  $\vec{\omega}_{i+1}^*$  zu sehen. Im rechten Bild dann die korrigierte Position des Punktes  $P_{i+1}$  mit der entsprechenden Auswertungsebene. Um den rechnerischen Aufwand während des Korrektor-Schritts so gering wie möglich halten, wird die Größe der Auswertungsebene durch den Wirbelkernradius begrenzt und eine Interpolation findet nur in dem in Abb. 5.3 kreisförmigen Teil der Auswertungsebene statt. Die Bestimmung des Wirbelkernradius wird in 5.3.3 erläutert, da diese Information ebenfalls für den einzubringenden Vorticity Confinement Term von Bedeutung ist. Die Genauigkeit dieser Methode ist natürlich abhängig von der Auflösung des kartesischen Gitters der Auswertungsebene.

- Splittung der Wirbelkernlinie:** Wirbel können zusammenlaufen. Dieses ist zum Beispiel bei den Wirbeln der Fall, welche sich an den Wurzeln von Propellerflügeln bilden. Diese Wirbel laufen stromabwärts zusammen im Nabenwirbel. Da die Detektion stromabwärts, also das Zusammenlaufen der Wirbel, für die Detektion keine Probleme darstellt, wird hier lediglich auf die Splittung der Wirbelkernlinie eingegangen. Dieses ist z.B. notwendig, wenn der Nabenwirbel entgegen der Strömungsrichtung detektiert wird und eine Verfolgung bis hin zu den Wirbeln an den Wurzeln der Flügel erwünscht ist. Die Möglichkeit der Erfassung einer Wirbelsplittung erfolgt im Korrektor-Schritt. Ist das Feature der Wirbelsplittung in der Kontrolldatei des numerischen Löser aktiviert, so wird die Auswertungsebene im Korrektorschritt auf das zweifache des Wirbelkernradius erweitert. Der innere Bereich der Auswertungsebene bis zum einfachen Wirbelkernradius wird, wie zuvor beschrieben, für den Standard-Korrektorschritt verwendet. Der äussere Bereich der Auswertungsebene bis zum zweifachen Radius des Wirbelkernradius wird bei der Wirbelsplittung ebenfalls ausgewertet. Sobald eine Kombination der Wirbelstärke und des Druckwerts in diesem Bereich detektiert wird, der ähnlich den Werten der Detektion im Wirbelzentrum ist, wird von einem neuen Wirbel bzw. einer Absplittung vom alten Wirbel ausgegangen.

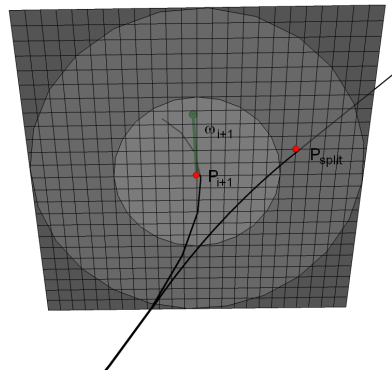


Abbildung 5.4: Korrektor-Schritt mit Wirbelsplittung

Der ermittelte Punkt  $P_{split}$  wird als neuer Startpunkt betrachtet, von dem eine eigenständige Detektion in vorgegebener Richtung weitergeführt wird.

### 5.3.2 Vortfind-Verfahren

Das Vortfind-Verfahren nach Pemberton [36] dient ebenfalls der Bestimmung von Wirbelkernzentren. Pemberton hat dieses Verfahren zunächst für die Ermittlung eines Wirbelkerns

in einem zweidimensionalen Geschwindigkeitsfeld entwickelt. Dieses Verfahren wurde später für dreidimensionale Problemstellungen erweitert. Das Vortfind-Verfahren stellt eine Alternative für den Korrektor-Schritt nach dem Druckminimum bzw. Wirbelstärkenmaximum dar. Die Geschwindigkeiten werden wie zuvor in einer zweidimensionalen Ebene ausgewertet. Die Vorgehensweise bis zum Vortfind-Korrektor-Schritt ist analog zum Prädiktor-Korrektor-Verfahren aus Kap. 5.3.1. Es wird ein Startpunkt für den Wirbel gesucht, darauffolgend wird ein Prädiktor-Schritt (Euler-Integration der Wirbelstärke) durchgeführt und im anschließenden folgt der Vortfind-Korrektor-Schritt.

Die Grundidee des Vortfind-Verfahrens ist die Aussage von Lugt [29] zur Bestimmung eines Wirbels: „A vortex is the rotating motion of a multitude of material particles around a common centre“. Auf Basis dieser Aussage werden in der Auswertungsebene, mit dem Prädiktor-Punkt als Zentrum und dem Vektor der Wirbelstärke als Normalenvektor, die Geschwindigkeiten ausgewertet. Die Ebene wird in drei Bereiche unterteilt. Jeder Geschwindigkeitsvektor erhält entsprechend der Richtung einen Wert  $\beta$  zugewiesen. Der Winkel  $\alpha$  ist definiert als der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der Referenzachse.

$$\begin{aligned} 0^\circ \leq \alpha < 120^\circ & \quad \beta = 0 \\ 120^\circ \leq \alpha < 240^\circ & \quad \beta = 1 \\ 240^\circ \leq \alpha < 360^\circ & \quad \beta = 2 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Für jeden Punkt wird im Anschluss der minimale Abstand zu Punkten mit einem abweichenden  $\beta$ -Wert gesucht. Die Abstände werden entsprechend als p, q und r bezeichnet. Jeweils einer dieser Werte erhält den Wert null. Nach Lugts Definition befindet sich an der Stelle ein Wirbelzentrum, an welchem der Abstand  $l$  ein Minimum hat.

$$l = p^2 + q^2 + r^2 \tag{5.30}$$

Der entsprechende Punkt, an dem drei Punkte mit unterschiedlichem Wert  $\beta$  am nächsten beieinander liegen wird von hier an als Wirbelkernzentrum betrachtet.

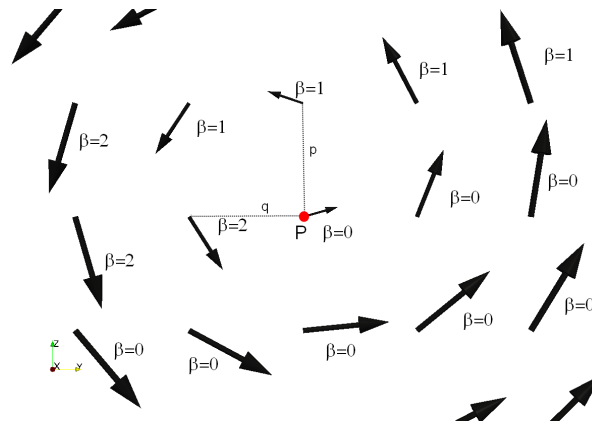


Abbildung 5.5: Vortfind-Verfahren [36]

Die Genauigkeit dieser Methode ist, wie die Prädiktor-Korrektor-Methode, abhängig von der Auflösung der Auswertungsebene. Als Vorteil ist besonders für kavitierende Strömungen die druckunabhängige Bestimmung des Wirbelkerns zu nennen. Nachteilig ist der erhöhte Rechenaufwand gegenüber dem Korrektor-Schritt nach dem Druckminimum.

### 5.3.3 Wirbellinie und Vorticity Confinement

Um den ermittelten Verlauf eines Wirbels zur Lokalisierung des einzubringenden Vorticity Confinement Terms nutzen zu können, muss ausgehend von der Wirbellinie ein Gebiet definiert werden in welchem der Vorticity Confinement Term eingesetzt wird. Der Bereich in den der wirbelerhaltende Term eingebracht wird, wird auf das dreifache des Wirbelkernradius beschränkt und an den Grenzen geglättet.

Zur Bestimmung des Wirbelkernradius werden die Radialgeschwindigkeiten des Wirbels betrachtet. Angefangen vom bestimmten Wirbelkernzentrum wird rechtwinklig zum Vektor der Wirbelstärke die Radialgeschwindigkeit bestimmt. Die Radialgeschwindigkeit steigt zunächst bis zum Erreichen des Wirbelkernradius an. Als Wirbelkernradius wird der Wert betrachtet, an dem zum ersten Mal eine Abnahme der Radialgeschwindigkeit festzustellen ist. Der Querschnitt des Wirbels wird vereinfacht als kreisförmig betrachtet. Da es sich jedoch in der Realität selten um einen kreisrunden Querschnitt handelt, muss die Bestimmung der Radialgeschwindigkeit sternförmig vom Wirbelkern an mehreren Stellen des Wirbels durchgeführt werden. Im Anschluss daran folgt die Mittelung der lokalen Wirbelkernradien. Um eine ausreichende Genauigkeit auch in den Bereichen zu erhalten, in denen mehrere Wirbel zusammenlaufen, hat sich eine Unterteilung in 20 Sektionen, also sternförmig in  $18^\circ$ -Schritten, als ausreichend herausgestellt. Wie u.a. bei Banks und Singer [3] beschrieben, gibt es Möglichkeiten

die Querschnittsfläche des Wirbels genauer zu bestimmen. Für die Kombination der Wirbeldetektion mit der Vorticity Confinement Methode ist jedoch die Annahme eines kreisförmigen Querschnitts völlig ausreichend, da die Priorität nicht auf der Abbildung des realen Wirbelquerschnitts liegt sondern auf der Bestimmung des Bereichs des dreifachen Wirbelkernradius. Der Wirbelkernradius wird für jeden Punkt der Wirbellinie gespeichert um diesen später in Kombination mit dem Vorticity Confinement Term zu nutzen.

Die Kombination von Wirbeldetektion und Vorticity Confinement wird durch die Einführung einer zusätzlichen globalen Variablen  $0 \leq \gamma \leq 1$  ermöglicht.  $\gamma$  kann ähnlich wie die Volumenfraktion bei einem VOF-Verfahren nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen und wird abhängig von der Lage der Zellzentren zu den Wirbellinien bestimmt.

$$\gamma = 1 - \left( \frac{l}{3r_v} \right)^n \quad \text{wenn } l \leq 3r_v$$

$$\gamma = 0 \quad \text{wenn } l > 3r_v \quad (5.31)$$

$l$  ist hier der Abstand vom Zellzentrum zum nächstgelegenen Punkt einer Wirbellinie und  $r_v$  der dazugehörige Wirbelkernradius an diesem Punkt. Sobald der Abstand  $l$  geringer ist als der dreifache Wirbelkernradius, nimmt  $\gamma$  einen Wert größer null an und signalisiert somit den Einsatz des Vorticity Confinement Terms. Durch den Einsatz der  $n$ -ten Potenz in Gl. 5.31 wird  $\gamma$  am Rand geglättet um hier einen Sprung zu verhindern und somit die Stabilität bei der Nutzung des Verfahrens zu verbessern. Als typischer Wert für  $n$  wird  $n \geq 4$  verwendet. In Abb. 5.6 ist der Verlauf von  $\gamma$  mit und ohne Glättung für unterschiedliche Potenzen dargestellt.

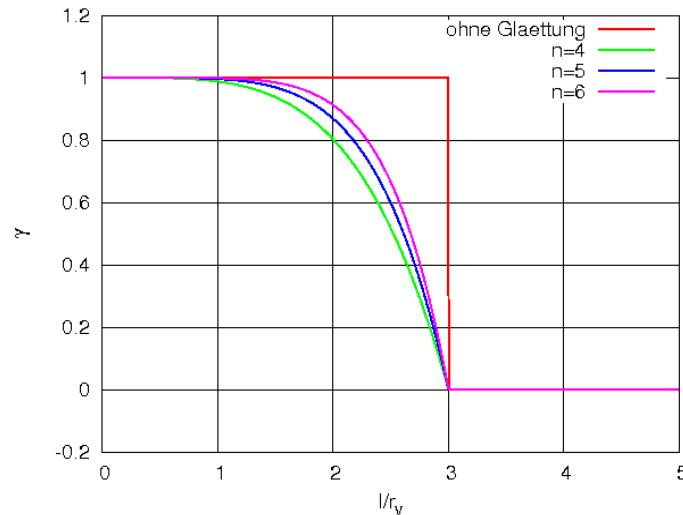


Abbildung 5.6: Glättung der Wirbelbegrenzung für das Vorticity Confinement Verfahren

Die Glättung beginnt erst außerhalb des Wirbelkerns, wodurch der Vorticity Confinement Term im Zentrum des Wirbels gegenüber den früheren Formulierungen nur sehr gering beeinflusst wird.

### 5.3.4 Implementierungsdetails

Die Bestimmung sowohl der Ermittlung eines Startpunktes als auch des Korrektor-Schritts nach dem Druckminimum erfolgt durch Interpolation im Rechengitter. Da davon auszugehen ist, dass sich sowohl ein Wirbelkern als auch die Punkte der Auswertungsebene niemals auf einem Punkt bzw. Punkten des Rechengitters befinden wird eine Interpolation notwendig. Die Interpolation erfolgt mittels einer Delaunay-Triangulation. Ermittelt werden vier Zellmittelpunkte mit denen ein irreguläres Tetraeder aufgespannt wird. Dieses irreguläre Tetraeder muss die Delaunay-Umkugelbedingung erfüllen und zudem muss sich der Punkt an dem interpoliert werden soll innerhalb dieses Tetraeders befinden.

Bei den Auswertungsebenen für die Ermittlung des Startpunktes und für den Korrektor-Schritt handelt es sich um Ebenen mit einem kartesischen 2D-Gitter. Die Parameter der Ebene für die Ermittlung eines Startpunkts werden anhand von Benutzerdaten übergeben. Als Randbedingungen für die Größe und Lage der Auswertungsebene sowie für das kartesische Gitter gelten:

- Ortsvektor der Auswertungsebene
- Normalenvektor der Auswertungsebene
- Kantenlänge der Auswertungsebene
- Anzahl der Unterteilungen je Begrenzungskante und damit entsprechend die Kantenlänge jeder kartesischen Zelle

Um bereits zu Beginn des Verfahrens eine ausreichende Genauigkeit zu erhalten, sollten die Parameter den lokalen Gitter- und Strömungsgrößen angepasst sein. Da diese Methode des Vorticity Confinements stets auf eine bereits konvergierte Lösung aufgesetzt wird, erfordert die benutzergesteuerte Startpunktsuche zunächst einen Schritt des Postprocessings um die Parameter grob abzuschätzen.

Der Prädiktor-Schritt wird begrenzt durch den maximalen Zellabstand der umliegenden Zellen und wird anhand folgender Formel beschrieben:

$$P_{i+1}^* = P_i + d_{max} \beta \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \quad (5.32)$$

$P_{i+1}^*$  sind die vorhergesagten Koordinaten,  $P_i$  die Ausgangskoordinaten und  $\vec{\omega}$  ist die Wirbelstärke.  $\beta$  ist ein Parameter für die Richtung der Integration, welcher nur die Werte 1 und -1 annehmen kann. Für  $\beta = 1$  erfolgt eine Integration in Richtung der Wirbelstärke und für  $\beta = -1$  entgegen der Richtung der Wirbelstärke.  $d_{max}$  stellt den maximalen Abstand zwischen dem Zellmittelpunkt der Zelle dar, in welchem sich der Ausgangspunkt befindet, und dem Zellmittelpunkt der umliegenden Zellen, welcher am weitesten entfernt ist.  $d_{max}$  ist somit allein vom Rechennetz abhängig. Ziel dieser Begrenzung der Schrittweite durch  $d_{max}$  ist eine möglichst genaue Erfassung der Wirbelkernlinie und damit eine möglichst genaue Vorhersage des Bereichs für den einzubringenden Kraftterm.

Die Randbedingungen der Auswertungsebenen des Korrektorschritts und der Auswertungsebenen zur Bestimmung des Wirbelkernradius werden anhand der Strömungseigenschaften und dem zugrundeliegenden Rechennetz bestimmt. Ortsvektor der Auswertungsebene ist der aus dem Prädiktor-Schritt bestimmte Punkt und der Normalvektor der Auswertungsebene ist der Vektor der Wirbelstärke in diesem Punkt. Die Kantenlänge der Auswertungsebene ist abhängig vom Wirbelkernradius im zuvor bestimmten Punkt der Wirbelkernlinie. Die Kantenlänge beträgt das zweifache des Wirbelkernradius. Jede Kante wird in 12 Punkte unterteilt so dass es zu einer Anzahl von 144 Gitterpunkten pro Auswertungsebene kommt. Dieses stellt einen guten Kompromiss zwischen ausreichender Genauigkeit und Rechenaufwand dar.

Durch die beschriebene Vorgehensweise der Wirbeldetektion wird für jeden selektierten Wirbel eine Wirbelkernlinie definiert. Durch das Zusammenlaufen von Wirbeln kann es jedoch zu einer mehrfachen Detektion eines Wirbels kommen. Ein Wirbel erhält somit zwei voneinander abweichende Wirbelkernlinien. Da die Abweichungen dieser Wirbelkernlinien gewöhnlich sehr gering sind, erhält man durch die Mehrfachdetektion keine weiterführenden Daten. Allein die Rechenzeit für die Detektion steigt. Um eine Mehrfachdetektion zu verhindern, wird in jeder Zelle, in der sich bereits eine Wirbelkernlinie befindet, ein Marker gesetzt. Vereinen sich nun zwei Wirbel so endet die Detektion eines Wirbels aufgrund dessen, dass der weiterführende Wirbel bereits detektiert wurde und die Zellen, welche den Wirbelkern repräsentieren, bereits mit einem Marker versehen sind.

Desweiteren ist eine schrittweise Erhöhung des Parameters  $\varepsilon$  notwendig. Der Ablauf einer Berechnung unter Verwendung von Vorticity-Confinement ist in dem Schaubild in Abb. 5.7 dargestellt.

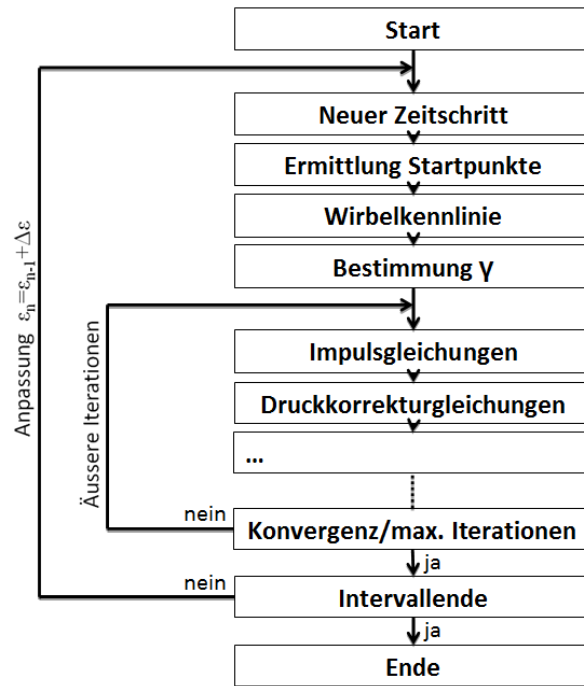


Abbildung 5.7: Ablauf einer Berechnung

Die Berechnung startet zunächst wie eine gewöhnliche instationäre numerische Strömungsberechnung. Zur Abschätzung eines Startpunkts bietet sich das Starten einer Berechnung mit einer bereits konvergierten Lösung an. Die ersten Zeitschritte der Berechnung werden ohne Vorticity Confinement durchgeführt. Sobald ein vorab definiertes Residuum erreicht wird, wird das Einbringen des zusätzlichen wirbelerhaltenden Terms aktiviert und die Stärke jeweils um einen Wert  $\Delta\varepsilon$  bis zum Maximalwert erhöht. Ebenfalls findet von nun an die Ermittlung der Wirbelkernlinie zu Beginn eines jeden Zeitschritts statt.



## 6 Anwendungsfälle

### 6.1 Einfache Wirbel

#### 6.1.1 Wirbelmodelle

In diesem Kapitel werden verschiedene Wirbelmodelle und Berechnungen mit diesen Modellen auf unterschiedlichen Gittern sowie in Kombination mit wirbelerhaltenden Methoden und unterschiedlichen Euler-Euler-Kavitationsmodellen vorgestellt. Zudem wird der Einfluss der Diskretisierung der konvektiven Terme gezeigt. Bei Wirbelströmungen oder wirbelbehafteten Strömungen handelt es sich in der Regel um drehungsbehaftete Strömungen. Zur Beschreibung einfacher Wirbel genügt die Beschreibung eines Tangentialgeschwindigkeitsfeldes in einer Ebene. Man spricht bei dieser Art von Wirbeln auch von ebenen Wirbeln, da diese Wirbel eine zylinderförmige Struktur annehmen.

Das nicht nur die örtliche Diskretisierung einen großen Einfluß auf die Abbildung von wirbelbehafteten Strömungen mit numerischen Methoden hat, sondern auch die Diskretisierung der konvektiven Terme, zeigen die folgenden Abb. 6.1 - 6.6.

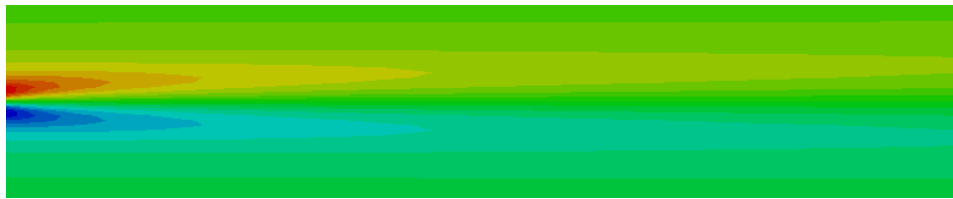


Abbildung 6.1: Tangentialgeschwindigkeitsverlauf Burgerswirbel, UDS (Upwind Differencing Scheme)

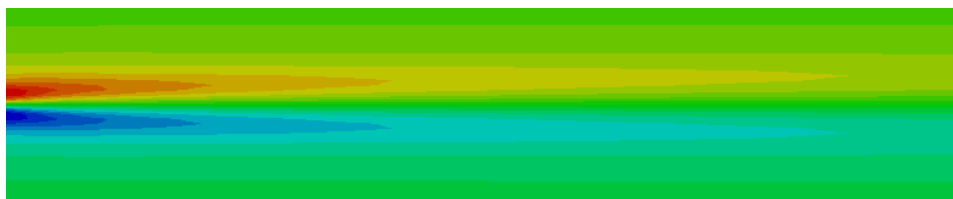


Abbildung 6.2: Tangentialgeschwindigkeitsverlauf Burgerswirbel, CDS (Central Differencing Scheme)

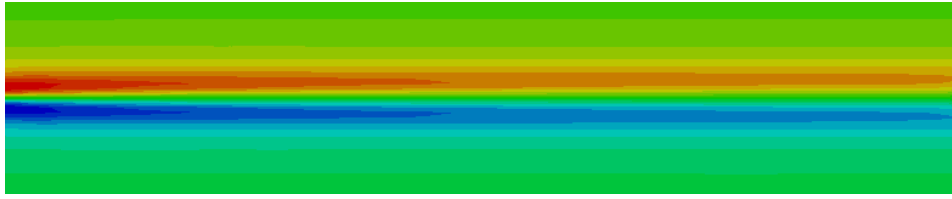


Abbildung 6.3: Tangentialgeschwindigkeitsverlauf Burgerswirbel, QUICK (Quadratic Upwind Interpolation Scheme for Convective Kinematics)



Abbildung 6.4: Druckverlauf Burgerswirbel, UDS (Upwind Differencing Scheme)

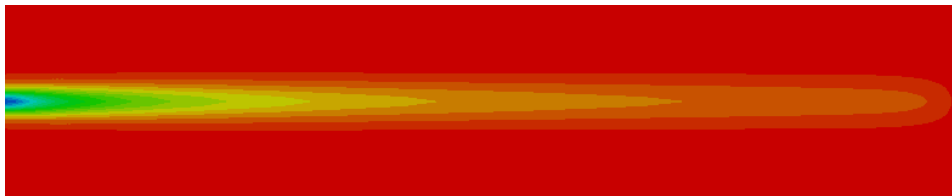


Abbildung 6.5: Druckverlauf Burgerswirbel, CDS (Central Differencing Scheme)

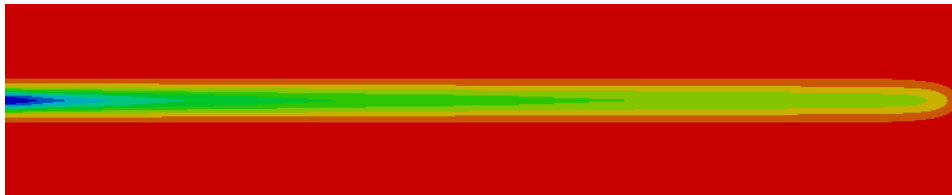


Abbildung 6.6: Druckverlauf Burgerswirbel, QUICK (Quadratic Upwind Interpolation Scheme for Convective Kinematics)

Die dargestellten Geschwindigkeits- und Druckverläufe basieren auf Berechnungen mit vernachlässigter Viskosität und ohne Modellierung von Turbulenz. Umso erstaunlicher ist der hohe Verlust der alleine aufgrund der numerischen Diskretisierung der konvektiven Flüsse erkennbar ist. Aufgrund dieser Ergebnisse wurden alle folgenden Berechnungen nur noch mit der QUICK-Diskretisierung durchgeführt. Natürlich sind die UDS- und CDS-Verfahren deutlich stabiler, jedoch steht dies in einer Unverhältnismäßigkeit zu den hohen Verlusten.

### 6.1.1.1 Starrkörperwirbel

Der Starrkörperwirbel ist gekennzeichnet durch eine lineare Tangentialgeschwindigkeitsverteilung  $\vec{v}_{tan}$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und Rotation  $\Omega$  in jedem Punkt. Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  ist beim Starrkörperwirbel genau doppelt so groß wie die Rotationsgeschwindigkeit  $\Omega$ . Ein Starrkörperwirbel entspricht der Geschwindigkeitsverteilung eines rotierenden Festkörpers und ist wie folgt definiert:

$$rot\vec{v} \neq 0 \quad (6.1)$$

$$v_{tan}(r) = \omega r \quad (6.2)$$

Da die Tangentialgeschwindigkeit für  $r \rightarrow \infty$  ebenfalls gegen  $\infty$  geht, sind reine Starrkörperwirbel in der Natur nicht anzutreffen. Starrkörperwirbel treten jedoch in der Natur in Wirbelzentren auf. So entspricht z.B. die Geschwindigkeitsverteilung im Wirbelkern eines Tornados der eines Starrkörperwirbels.

### 6.1.1.2 Potentialwirbel

Der Potentialwirbel besitzt eine hyperbolische Tangentialgeschwindigkeitsverteilung. Wie bei einer Potentialströmung handelt es sich bei diesem Wirbelmodell zwar um einen Wirbel, jedoch mit der Wirbelstärke  $\vec{\omega}=0$  für  $r>0$ . Die Fluidpartikel führen somit nur eine translatorische rotationsfreie Bewegung auf einer Kreisbahn aus. Im Ursprung ( $r=0$ ) liegt beim Potentialwirbel eine Singularität vor. Die Tangentialgeschwindigkeit  $\vec{v}_{tan}$  und die Wirbelstärke werden hier  $\infty$ .

$$rot\vec{v} = 0 \quad (6.3)$$

$$v_{tan}(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \quad (6.4)$$

$$\Gamma(r) = \Gamma_0 = const \quad (6.5)$$

### 6.1.1.3 Rankinewirbel

Der Rankinewirbel wird durch Kombination eines Potential- und eines Starrkörperwirbels gebildet. Im Wirbelkern wird das Modell des Starrkörperwirbels verwendet, im Aussenbereich das Modell des Potentialwirbels.

$$v_{tan}(r) = \begin{cases} \omega r, & \text{mit } \omega = \frac{\Gamma_0}{2\pi r a^2} \quad \text{wenn } r \leq a, \\ \frac{\Gamma_0}{2\pi r}, & \text{wenn } r > a. \end{cases} \quad (6.6)$$

$a$  beschreibt die Grenze zwischen den beiden benutzten Modellen. Ist  $r \leq a$  so handelt es sich um einen Starrkörperwirbel mit konstanter Wirbelstärke  $\vec{\omega} = const.$  Für  $r > a$  handelt es sich um einen Potentialwirbel mit  $\vec{\omega} = 0$ . Das Geschwindigkeitsmaximum der Tangentialgeschwindigkeit liegt bei  $r = a$ . Die Singularität des Potentialwirbels aus 6.1.1.2 für  $r \rightarrow 0$  wird mit dieser Formulierung umgangen.

### 6.1.1.4 Burgerswirbel

Der Burgerswirbel trifft das Geschwindigkeitsbild realer Wirbel am treffendsten. Beim Burgerswirbel handelt es sich wie beim Rankinewirbel im Wirbelkern um einen Starrkörperwirbel und im Aussenbereich um einen Potentialwirbel. Der Übergangsbereich zwischen beiden Wirbelmodellen ist geglättet. Die erste Ableitung der Funktion ist somit im Vergleich zum Rankinewirbel stetig. Die Funktion des Burgerswirbel für die Axial- und Tangentialgeschwindigkeit lautet wie folgt:

$$v_{axial}(r) = -\frac{\gamma}{2}r, \quad v_{tan}(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}(1 - e^{-\beta r^2}) \quad (6.7)$$

## 6.1.2 Geometrie des Rechengebiets und Randbedingungen

Es handelt sich bei diesen Berechnungen um geometrisch sehr einfache Testfälle von Wirbelströmungen. Für diese Testfälle wurde ein zylinderförmiges Rechengebiet gewählt. Dieses eignet sich besonders, da ein geringer Einfluss der Randbedingungen erwartet werden kann. Das Rechengebiet erstreckt sich über eine Länge von 1000 mm mit einem Radius von

100 mm. Die Randbedingung am Einstromrand ist eine Dirichlet-Bedingung. Die Geschwindigkeitskomponenten sind durch das Wirbelmodell bekannt und zeitlich konstant. Die Mantelfläche des Zylinders erhält eine sogenannte slip-Bedingung. Der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zu dieser Fläche ist gleich null. Für den Ausströmrand wird eine konstante Druckrandbedingung vorgegeben (Neumann-Bedingung).

### 6.1.3 Rechengitter

Das blockstrukturierte Hexaeder-Rechengitter wurde für diese Problemstellung mit dem Programm ANSYS ICEM erzeugt. Die Geometrie des Zylinders wurde ausgehend von einem quaderförmigen Block mit den Abmessungen 1000 mm x 100 mm x 100 mm und einem sich darum befindlichen O-Gitter abgebildet. Der Vorteil dieser Vernetzungsstrategie liegt in der Möglichkeit, den Bereich des Wirbelkerns innerhalb des Quaders, mit einem kartesischen Netz zu versehen. Die Randanpassung erfolgt ausserhalb des O-Gitters durch verzerrte Zellen. Die Abb. 6.7 zeigt die Topologie der Blockstruktur.

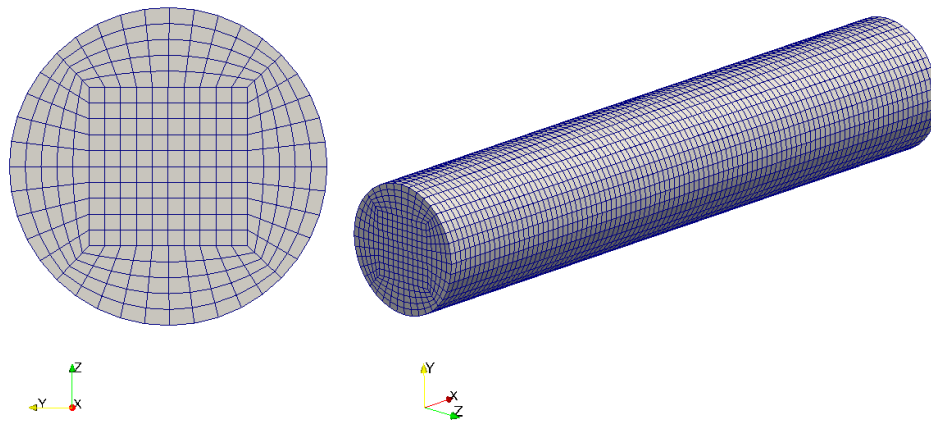


Abbildung 6.7: Gitternetztopologie

Die Berechnungen mit den Wirbelmodellen wurden auf unterschiedlichen Gitterauflösungen durchgeführt. Die Abmessungen der kartesischen Hexaeder im Bereich des inneren Blocks variieren zwischen 10 mm x 10 mm x 10 mm und 2,5 mm x 2,5 mm x 2,5 mm. Ebenfalls wurden Berechnungen auf nicht kartesischen Gittern durchgeführt. Hierfür wurde der Bereich im Zentrum des Wirbels verfeinert. Um die Dissipation und den Einfluss des Vorticity Confinements

für langgestreckte Zellen zu ermitteln, wurde die Länge des Rechengebiets bei gleichbleibender Zellanzahl auf das zwei-, drei- und vierfache verlängert. In der folgenden Tabelle wird eine Übersicht über die verwendeten Rechengitter gegeben.

Tabelle 6.1: Rechengitter

	Bezeichnung	$L_{Zyl}$ [mm]	$r_{Zyl}$ [mm]	$l_{Zelle}$ [mm]	$N_{Zellen}$	$N_{Pkt}$
01	101x11x11	1000	100	10 x 10 x 10	30000	32421
02	101x11x11_X2	2000	100	20 x 10 x 10	30000	32421
03	101x11x11_X3	3000	100	30 x 10 x 10	30000	32421
04	101x11x11_X4	4000	100	40 x 10 x 10	30000	32421
05	101x11x11_ref	1000	100	10 x var. x var.	30000	32421
06	101x21x21	1000	100	10 x 5 x 5	88000	93021
07	201x11x11	1000	100	5 x 10 x 10	60000	64521
08	201x21x21	1000	100	5 x 5 x 5	176000	185121
09	201x21x21_X2	2000	100	10 x 5 x 5	176000	185121
10	201x21x21_X3	3000	100	15 x 5 x 5	176000	185121
11	201x21x21_X4	4000	100	20 x 5 x 5	176000	185121
12	201x21x21_ref	1000	100	5 x var. x var.	176000	185121
13	26x21x21	1000	100	40 x 5 x 5	22000	23946
14	301x31x31	1000	100	3,33 x 3,33 x 3,33	558000	578221
15	301x31x31_ref	1000	100	3,33 x var. x var.	558000	578221
16	401x11x11	1000	100	2,5 x 10 x 10	120000	128721
17	401x21x21	1000	100	2,5 x 5 x 5	352000	369321
18	401x41x41	1000	100	2,5 x 2,5 x 2,5	1344000	1379841

In der Tab. 6.1 bezeichnet  $L_{Zyl}$  die Länge des Rechengebiets,  $r_{Zyl}$  den Radius des Rechengebiets,  $l_{Zelle}$  ist die Abmessung der Zellen im Wirbelzentrum und  $N_{Zellen}$  bzw.  $N_{Pkt}$  die Zell- bzw. Punktzahl des Rechengitters. Die Abmessungen der Zellen im Wirbelkernzentrum kann nur für kartesische (rechtwinklige) Netze angegeben werden. Die angegebenen Werte entsprechen den Kantenlängen in x-, y- und z-Richtung. Bei den Netzen mit dem Kürzel \_ref handelt es sich ebenfalls um kartesische Netze mit einer Verfeinerung im Wirbelkernzentrum. Die angegebenen Werte für  $l_{Zelle}$  können nicht allgemein angegeben werden, da die Kantenlänge nicht konstant ist und zum Wirbelkernzentrum hin abnimmt. In den folgenden Diagrammen wird für die Bezeichnung des Rechnernetzes die Bezeichnung aus der Tabelle 6.1 angegeben. Ziel dieser Berechnungen ist es, den Einfluss der Netzauflösung in Wirbelströmungen zu zeigen. Hierzu wird zum einen der Druckverlauf im Zentrum des Wirbelkerns stromabwärts und zum anderen die Tangentialgeschwindigkeiten der einzelnen Berechnungen verglichen. Wie

erwartet ist die Dissipation auf nicht ausreichend fein diskretisierten Netzen deutlich höher. Die Ergebnisse auf den fein aufgelösten Netzen dienen als Benchmark für die späteren Berechnungen mit der Vorticity Confinement Technik. Hier soll die Eignung des vorgestellten Verfahrens auf grob diskretisierten Netzen geprüft werden. Zudem wird die Funktionalität der Wirbelsplittung anhand von einfachen Wirbelmodellen getestet.

#### 6.1.4 Vergleich der Berechnungen ohne Vorticity Confinement

Es folgt zunächst ein Vergleich der Berechnungen ohne Vorticity Confinement. Die Viskosität wurde auf annähernd null gesetzt, um den Einfluss dieser zu vernachlässigen. Es handelt sich somit um quasi-nicht-viskose Berechnungen, ähnlich einer reibungsfreien Berechnung mit den Euler-Gleichungen. Turbulenzmodellierung wurde nicht berücksichtigt. Die Abb. 6.8 zeigt den Druckverlauf im Wirbelkern für die Rechennetze mit der Bezeichnung 101x11x11, 201x21x21, 301x31x31 und 401x41x41. Neben einem deutlich niedrigeren Druck an der Einlaß-Randbedingung, bedingt durch Interpolation der Geschwindigkeiten für jede Zelle am Einlass, kann auch ein geringerer Anstieg des Drucks im Wirbelkern mit steigender Netzauflösung beobachtet werden. Dieses Verhalten kann mit der Vorticity Confinement Formulierung auch für Netze mit geringen Auflösungen ermöglicht werden.

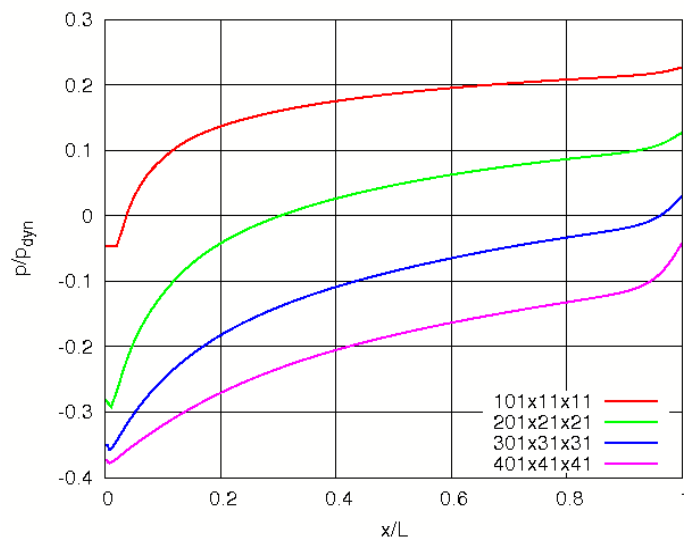


Abbildung 6.8: Druckverlauf im Wirbelkernzentrum bei unterschiedlichen Netzauflösungen

Diese Ergebnisse spiegeln sich ebenso in der Betrachtung der Tangentialgeschwindigkeiten wieder. Die folgenden Abbildungen 6.9 - 6.12 zeigen die Tangentialgeschwindigkeit in der Einlassebene und nach 0,1L, 0,2L und 0,5L des Rechengebiets für die Rechengebiete mit Bezeichnung 101x11x11, 201x21x21, 301x31x31 und 401x41x41. Das idealisierte Profil des

Burgerswirbels ist ebenfalls dargestellt und dient als Referenz für die berechneten Geschwindigkeitsprofile. Die Tangentialgeschwindigkeit auf der y-Achse ist normiert mit der maximalen Tangentialgeschwindigkeit des vorgegebenen Geschwindigkeitsprofils. Die x-Achse zeigt den mit dem Wirbelkernradius normierten Abstand vom Wirbelkern.

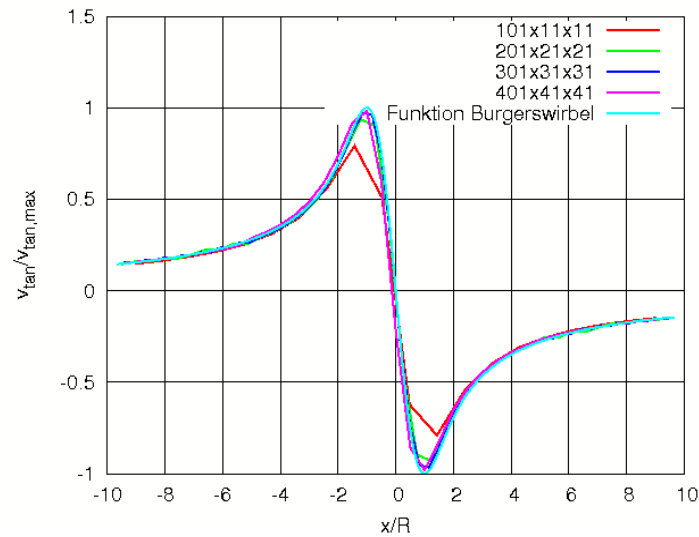


Abbildung 6.9: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen,  $\frac{x}{L} = 0,0$

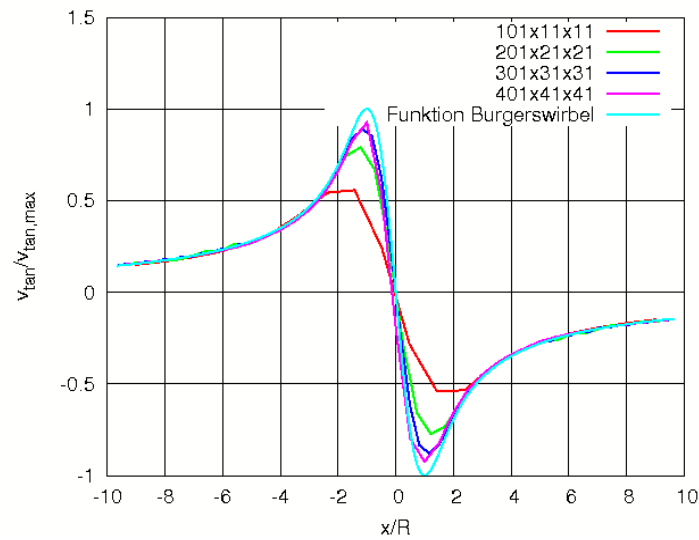


Abbildung 6.10: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen,  $\frac{x}{L} = 0,1$



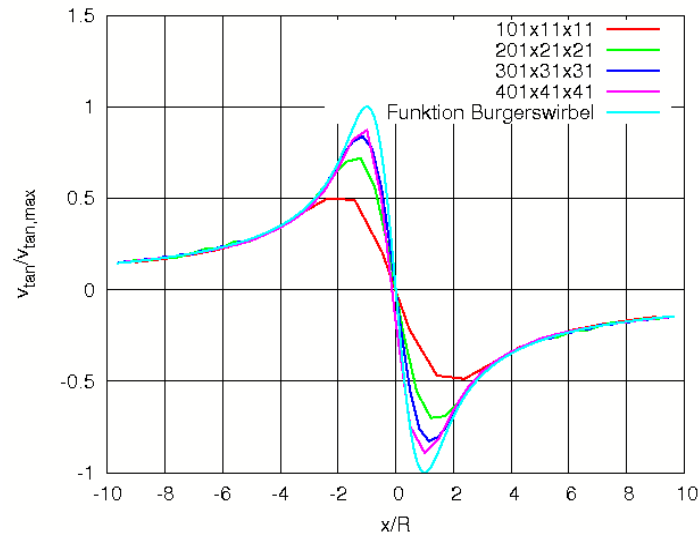


Abbildung 6.11: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen,  $\frac{x}{L} = 0,2$

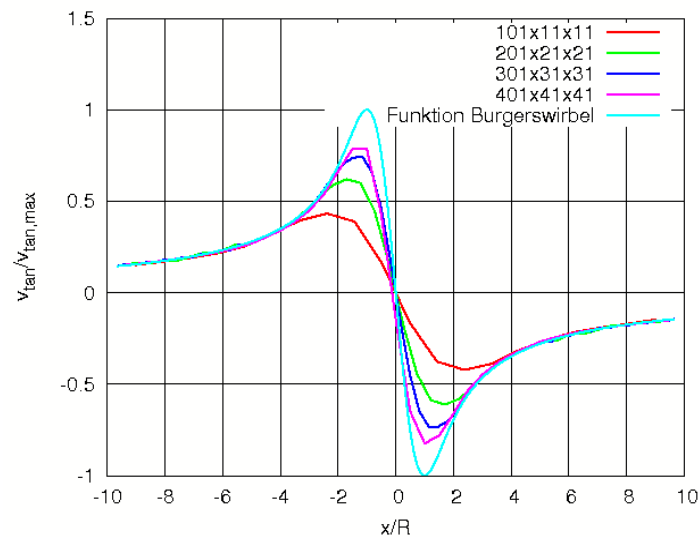


Abbildung 6.12: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für unterschiedliche Zellgrößen,  $\frac{x}{L} = 0,5$

Bereits in der Einlassebene ist eine für die grob aufgelösten Netze große Abweichung zum vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil des Burgerswirbels vorhanden. Noch deutlicher ist jedoch die Abnahme der maximalen Rotationsgeschwindigkeit auf den grob aufgelösten Netzen festzustellen. Während auf dem Netz mit der Bezeichnung 101x11x11 nach der halben Länge des Rechengebiets die Rotationsgeschwindigkeit auf  $0,4v_{tan,max}$  gesunken ist, ist auf dem Netz mit der Bezeichnung 401x41x41, dem am feinsten aufgelösten Netz, eine Abnahme auf nur ca.  $0,8v_{tan,max}$  festzustellen. Noch gravierender wird die Abnahme, wenn wir von den bisher vor-

liegenden rechtwinkligen Rechenzellen gleicher Kantenlänge zu quaderförmigen Rechenzellen wechseln. Ergebnisse dieser Berechnungen sind in den Abbildungen 6.13 - 6.15 dargestellt. Zu bemerken ist, dass es sich immer noch um rechtwinklige Rechenzellen handelt.

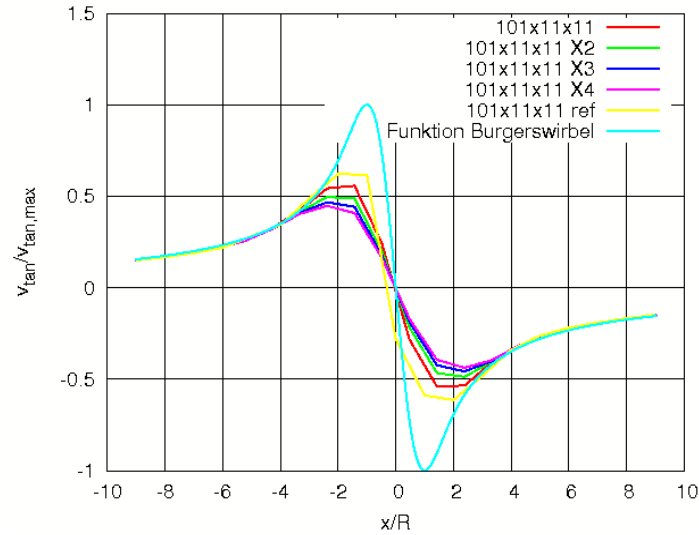


Abbildung 6.13: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Netze gleicher Zellanzahl mit unterschiedlich gestreckten Zellen,  $\frac{x}{L} = 0,1$

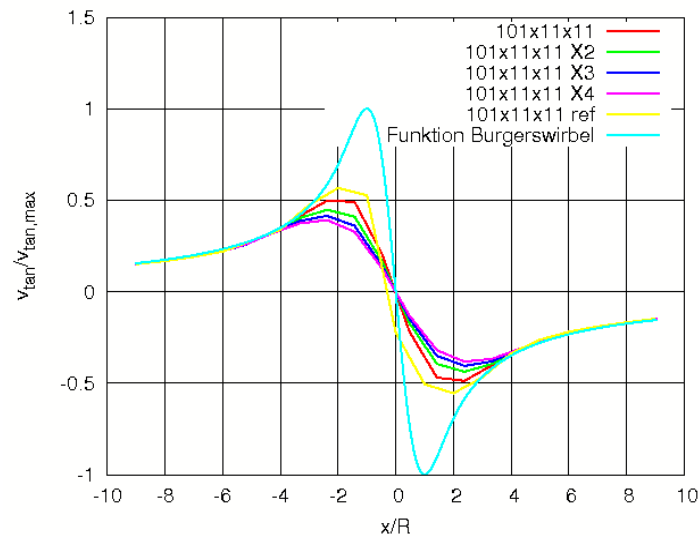


Abbildung 6.14: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Netze gleicher Zellanzahl mit unterschiedlich gestreckten Zellen,  $\frac{x}{L} = 0,2$

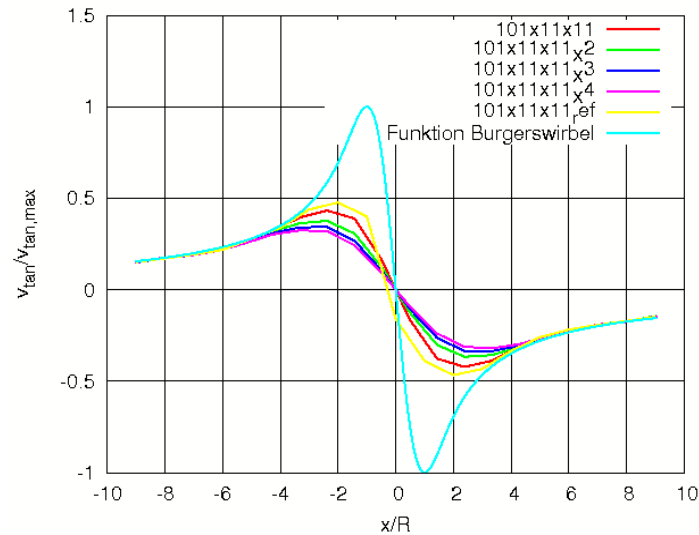


Abbildung 6.15: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Netze gleicher Zellanzahl mit unterschiedlich gestreckten Zellen,  $\frac{x}{L} = 0,5$

Im Vergleich zu den zuvor betrachteten Geschwindigkeitsprofilen zeigen die Berechnungen auf den quaderförmigen Netzen noch einmal eine deutlich höhere Dissipation und somit eine deutlich höhere Rotationsgeschwindigkeitsabnahme. Allgemein kann festgehalten werden, dass alle Berechnungen eine durchweg starke Abnahme der rotierenden Anteile der Strömung zeigen, obwohl die Berechnungen annähernd reibungsfrei durchgeführt wurden.

### 6.1.5 Berechnungen mit Vorticity Confinement

Die Berechnungen einfacher Wirbel mit Vorticity Confinement sind mit den vorgestellten bisherigen Formulierungen des Vorticity Confinement ohne weiteres möglich, da kein Einfluss von Grenzschichtströmungen vorhanden ist. Bereiche mit hoher Wirbelstärke sind allein im Bereich des Wirbels vorhanden. Bereiche mit lokalen höheren Wirbelstärken als im zu untersuchenden Wirbelkern sind aufgrund der Auswahl des Strömungsproblems nicht vorhanden. Um jedoch die Eignung der Kopplung zwischen der Wirbelfindung und dem Vorticity Confinement zu überprüfen, wird auch hier der Algorithmus zur Bestimmung der Wirbelkernlinie durchlaufen. Ergebnisse werden für die Wirbelausbreitung auf dem Rechennetz mit der Bezeichnung 101x11x11 dargestellt. Als Referenz werden die Ergebnisse der Berechnung auf dem fein aufgelösten Rechennetz mit der Bezeichnung 401x41x41 verwendet. Diese Ergebnisse sollen auf dem groben Netz mit Hilfe der Vorticity Confinement Formulierung ebenfalls erreicht werden.

Die folgende Abb. 6.16 und 6.17 zeigen zunächst den Bereich, in dem ein wirbelerhaltender Term in die Berechnung eingebracht wird. Die Geschwindigkeits- und Druckverteilung zeigt deutlich, dass nur die Bereiche selektiert werden, welche für die Wirbelerhaltung von Bedeutung sind. Der Radius des erkannten Bereichs nimmt aufgrund der Wirbelaufweitung und des geringeren Tangentialgeschwindigkeitsgradienten mit der Strömungsrichtung geringfügig zu.



Abbildung 6.16: Tangentialgeschwindigkeiten und Bereich des Vorticity Confinements

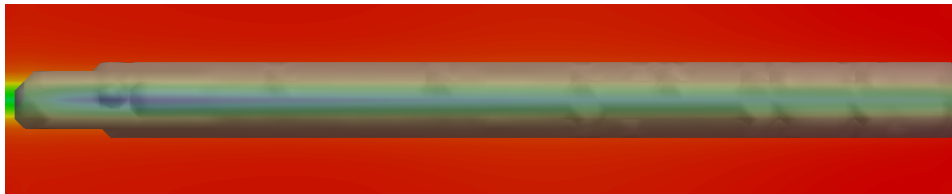


Abbildung 6.17: Druckverlauf und Bereich des Vorticity Confinements

Betrachtet man nun die Tangentialgeschwindigkeiten und die Druckverteilung in der Mitte des Rechengebiets, so kann festgestellt werden, dass eine gute Übereinstimmung der Berechnung mit Vorticity Confinement und der Berechnung auf einem feiner aufgelösten Netz vorliegt. Dieses zeigen die beiden nächsten Abbildungen 6.18 und 6.19. Die Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit auf dem Netz mit der Bezeichnung 101x11x11 konnte verringert werden und liegt nun auf dem Niveau der Berechnung auf dem fein aufgelösten Netz mit der Bezeichnung 401x41x41. Gleiches gilt für das Druckminimum im Wirbelkern.

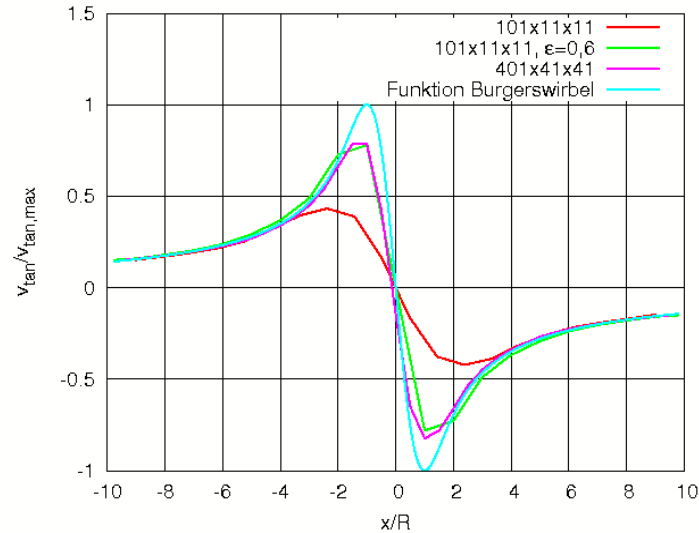


Abbildung 6.18: Verlauf der Tangentialgeschwindigkeiten im Wirbelkernzentrum für Berechnung mit Vorticity Confinement und Referenzberechnungen,  $\frac{x}{L} = 0,5$

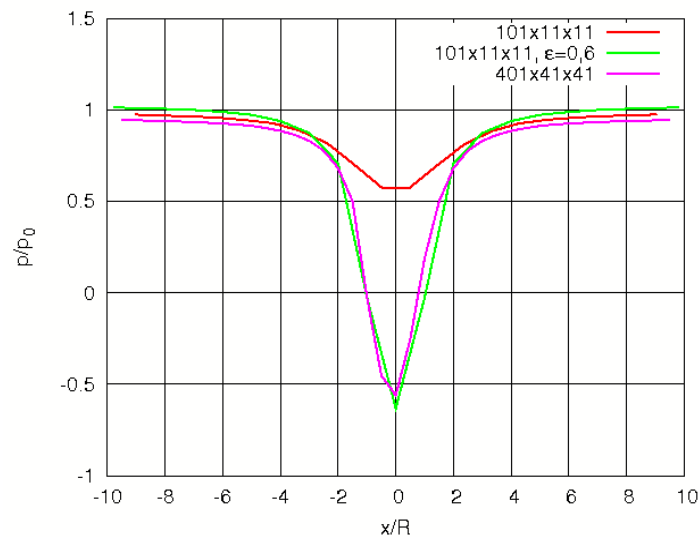


Abbildung 6.19: Druckverlauf im Wirbelkernzentrum für Berechnung mit Vorticity Confinement und Referenzberechnungen,  $\frac{x}{L} = 0,5$

Bei der Berechnung mit Vorticity Confinement handelt es sich aufgrund der schrittweisen Erhöhung von  $\varepsilon$  um eine konvergierende Lösung.

Zur weiteren Annäherung an reale Problemstellungen und zur Prüfung des Algorithmus zur Bestimmung der Wirbelkernlinie zwei sich vereinernden Wirbel, wurden die Geschwindigkeitsprofile zwei versetzter Burgerswirbel als Einlassrandbedingung vorgegeben. Die folgen-

den Abb. 6.20 und 6.21 zeigen das Ergebnis der Berechnung mit der ermittelten Wirbelkernlinie.

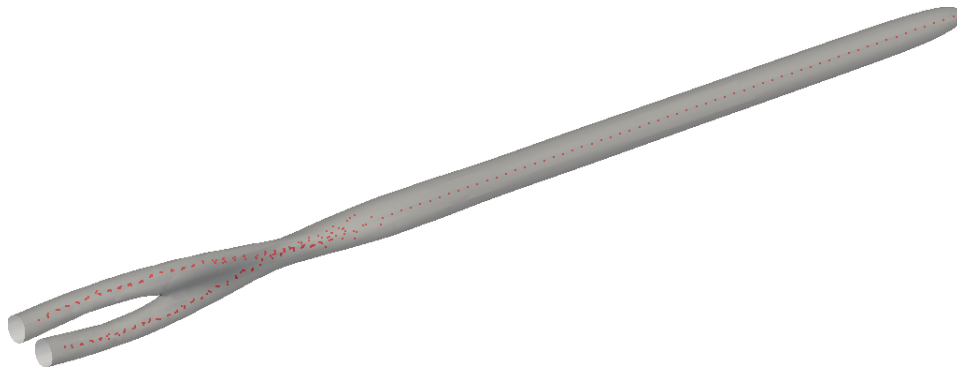


Abbildung 6.20: Wirbelkernlinie und Isofläche des Drucks für Berechnung mit zwei Burgerswirbeln

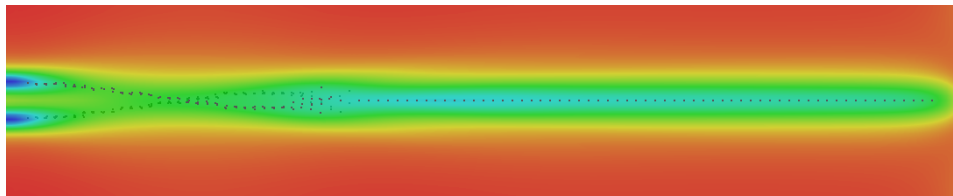


Abbildung 6.21: Wirbelkernlinie und Druckverlauf in mittlerer Ebene für Berechnung mit zwei Burgerswirbeln

## 6.2 Spitzenwirbel eines Tragflügels

Nachdem im vorherigen Kapitel Wirbel anhand von Geschwindigkeitsprofilen an der Einlassrandbedingung wirbelbehaftete Strömungen vorgegeben wurden, folgt in diesem Kapitel die Untersuchung der dreidimensionalen Umströmung eines Tragflügels. Untersucht wurde ein NACA16020-Tragflügel mit einer elliptischen Planform. Die Halbspannweite des Tragflügels beträgt 120 mm bei einer Wurzellänge von 80 mm. Untersucht wird in diesem Testfall die Ausbreitung des Spitzenwirbels, welcher aufgrund der hohen Umfangsgeschwindigkeiten zu einem deutlichen Druckabfall im Wirbelkern führt. Geschwindigkeitsprofile in axialer wie auch tangentialer Richtung des Spitzenwirbels dieses Tragflügels wurden bereits in mehreren Kavitationstanks aufgemessen und veröffentlicht. Referenzversuche zu den durchgeführten Berechnungen sind u.a. veröffentlicht in [14]. Die Versuche wurden im Kavitationstank der Ecole Navale (ENCT) in Lanveoc bei einer Profilanstellung von  $10^\circ$  durchgeführt. Versuchsergebnisse für Auftriebsbeiwerte und Aufmessungen der Spitzenwirbel liegen vor.

Die Berechnungen dieses Tragflügels wurden sowohl mit als auch ohne Wirbeldetektion durchgeführt. Ebenso erfolgten Berechnungen mit Kavitationsmodellen nach dem Euler-Euler-Ansatz. Bereits in [16] wurden Berechnungen eines Tragflügels mit bekannten Vorticity Confinement Methoden durchgeführt. Aufgrund der nur geringen Einflußnahme auf die numerische Lösung und der entsprechend geringen Einflußnahme auf den Erhalt des Spitzenwirbels, wurde das Verfahren angepasst. Diese Ergebnisse werden im Folgenden präsentiert.

### 6.2.1 Rechengitter

Bei dem Rechengitter des Tragflügels handelt es sich um ein hierarchisch strukturiertes Rechengitter, welches mit der Vernetzungssoftware HEXPRESS der Firma NUMECA erstellt wurde. Das Rechenggebiet entspricht exakt den Abmessungen des Kavitationstanks der Ecole Navale (ENCT) um während der Modellierung keine Abweichungen zum Versuch zu haben. Die Länge der Teststrecke beträgt 1000 mm bei einem Querschnitt von 192 mm x 192 mm. Der Tragflügel ist mittig an einem der 192 mm vertikalen Seitenwände angeordnet mit einem Abstand der Vorderkante zum Einstromrand von 300 mm. Zur Untersuchung der Ausbreitung des Spitzenwirbels, ist im Bereich des Spitzenwirbels eine lokale Verfeinerung des Rechnernetzes vorgenommen worden. Um auch hier die Netzabhängigkeit zu zeigen, wurden drei verschiedene Versionen des Rechnernetzes erstellt. Die Stufe I der Verfeinerung ist die Ausgangsversion des Rechnernetzes, bei der Stufe II wurden die Zellen im Bereich des Spitzenwirbels noch einmal halbiert und in der Stufe III noch ein weiteres mal halbiert. Die Kantenlänge im Bereich des Spitzenwirbels der Stufe III entspricht entsprechend vorheriger Beschreibung nur noch einem Viertel der Kantenlänge der Stufe I. Das Nahfeld sowie das Fernfeld des Tragflügels bleiben von Stufe I bis zur Stufe III unverändert. Der dimensionslose Wandabstand  $y^+$  liegt für alle Netze im Bereich  $y^+ \leq 10$ . Auf eine feinere Auflösung der Grenzschicht wurde bewusst verzichtet, da der Fokus auf der Betrachtung des Spitzenwirbels liegt. Die folgenden Abb. 6.22 - 6.27 zeigen das Oberflächennetz gefolgt vom Rechenggebiet des NACA-Tragflügels in den einzelnen Verfeinerungsstufen.

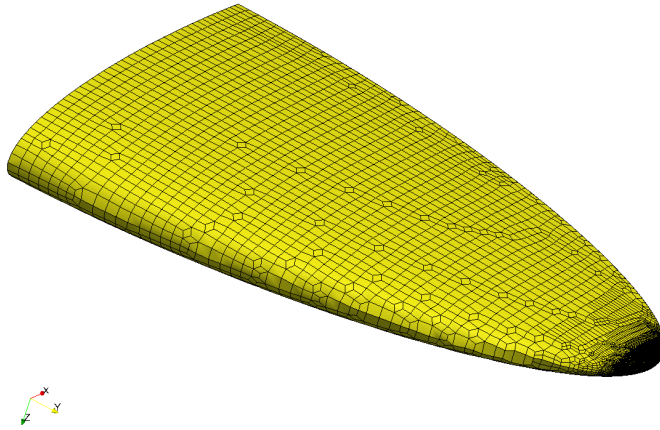


Abbildung 6.22: Oberflächennetz des NACA16020-Tragflügels

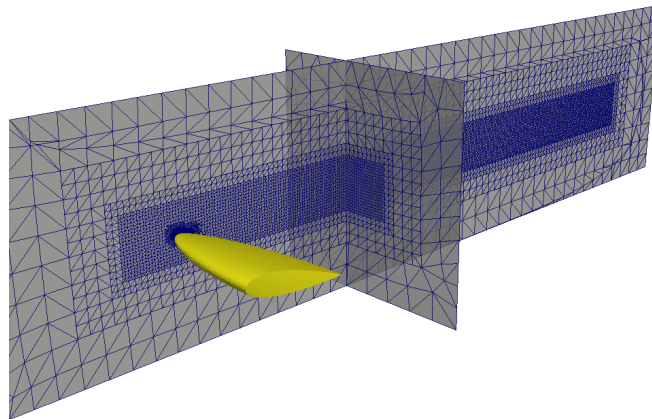


Abbildung 6.23: Rechennetz des NACA16020-Tragflügels, Stufe I, grob



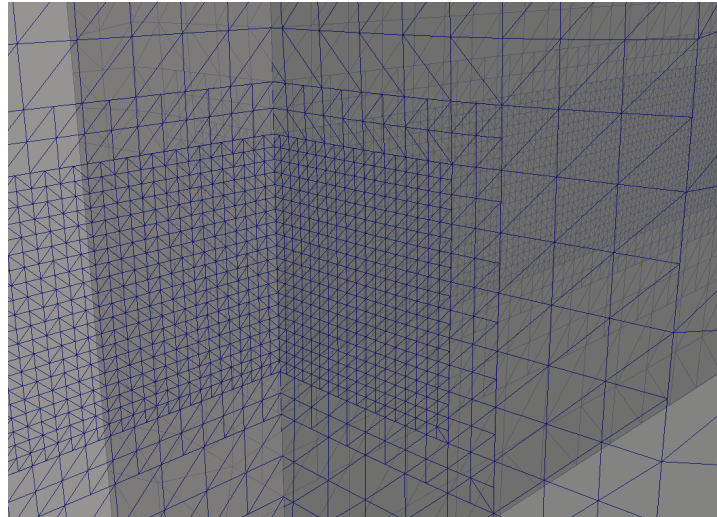


Abbildung 6.24: Detail des Rechennetzes des NACA16020-Tragflügels, Stufe I, grob

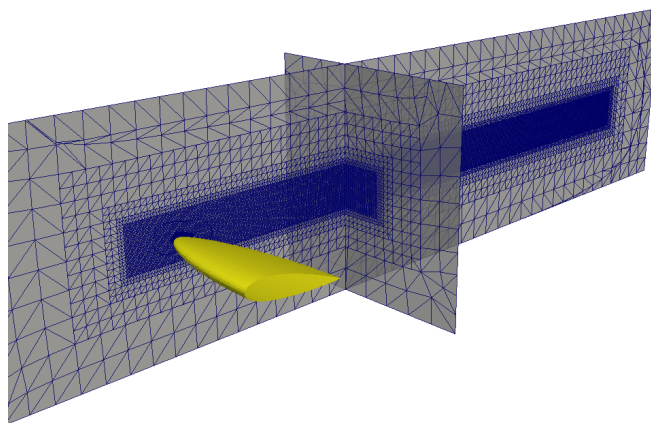


Abbildung 6.25: Rechennetz des NACA16020-Tragflügels, Stufe II, mittel

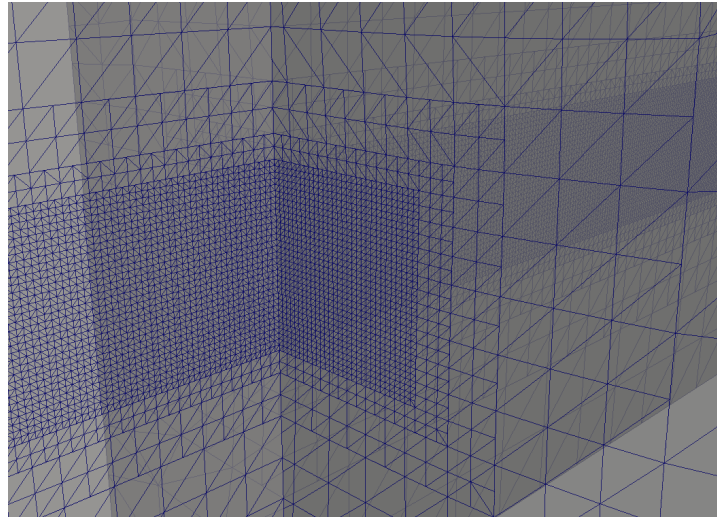


Abbildung 6.26: Detail des Rechennetzes des NACA16020-Tragflügels, Stufe II, mittel

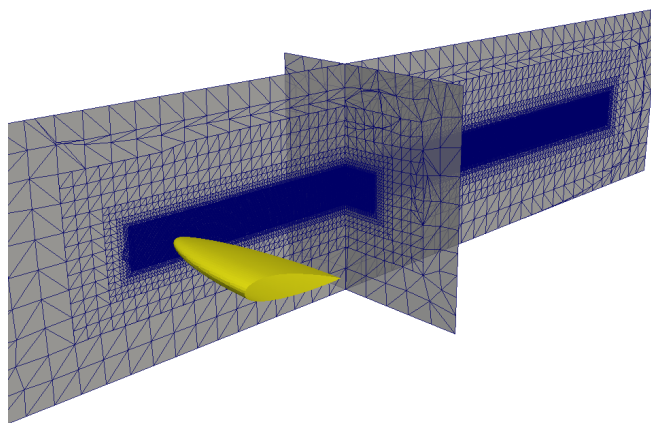


Abbildung 6.27: Rechennetz des NACA16020-Tragflügels, Stufe III, fein

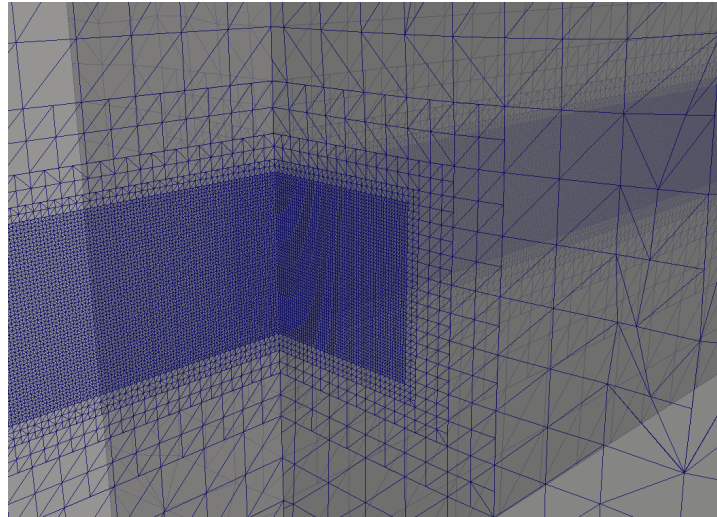


Abbildung 6.28: Detail des Rechennetzes des NACA16020-Tragflügels, Stufe III, fein

Die Kantenlängen im Spitzenwirbelbereich des groben Rechennetzes beträgt 2,4 mm, im mittleren Netz entsprechend 1,2 mm und im feinen Netz 0,6 mm. Die Anzahl der Kontrollvolumen steigt von grober Auflösung zu feiner Auflösung von 318917 über 950621 auf 4580724. Die Anzahl der Oberflächenelemente bleibt annähernd konstant, da lediglich im Bereich der Tragflügelspitze die Verfeinerung Einfluss auf die Erstellung des Oberflächennetzes hat. Die statistischen Angaben sind noch einmal in der Tabelle 6.2 dargestellt.

Tabelle 6.2: Rechengitter-Tragfluegel

	Bezeichnung	$N_{Zellen}$	$N_{Pkt}$	Kantenlänge im Spitzenwirbelbereich [mm]
01	coarse	318917	353510	2,4
02	medium	950621	1015907	1,2
03	fine	4580724	5067042	0,6

### 6.2.2 Randbedingungen

Die Einströmrandbedingung ist eine Geschwindigkeitsrandbedingung mit  $v_0 = \frac{Re \cdot \eta}{\rho L}$ . Für die Ausströmrandbedingung wird eine Druckrandbedingung gewählt. Für Berechnungen ohne Kavitationsmodellierung wird der Umgebungsdruck gewählt. Für Berechnungen mit Kavitationsmodellierung wird eine von der Kavitationszahl abhängige Druckrandbedingung gewählt. Der vorgegebene Druck errechnet sich aus der Kavitationszahl  $\sigma$  zu  $p_0 = \frac{1}{2} \sigma \rho v_0^2 + p_{sat}$ . Die Seitenwände und der Tragflügel erhalten eine Haftrandbedingung.

### 6.2.3 Ergebnisse

Zunächst kann festgestellt werden, dass der Einfluß der wirbelerhaltenden Maßnahmen auf den Auftriebsbeiwert vernachlässigbar ist. Hierzu wurden die Standard-Berechnungen mit  $Re_{15,0} = 1,2 \cdot 10^6$  mit den Berechnungen mit dem Vorticity-Confinement-Ansatz verglichen. Da für diese Reynoldszahl keine Informationen zur Spitzenwirbelausbreitung vorliegen, beschränkte sich die Auswertung auf den Einfluß des Vorticity-Confinement auf den Auftriebsbeiwert. Es konnten keine Veränderungen des Widerstands- und Auftriebsbeiwerts festgestellt werden, da aufgrund der Eingrenzung des Wirkgebiets der zusätzlichen Kraftterme das Nahfeld des Tragflügels nicht beeinflusst wird.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Berechnungen für  $Re_{13,5} = 1,08 \cdot 10^6$  diskutiert. Unterschiede der Wirbelausbreitung auf den einzelnen Rechennetzen werden aufgezeigt. Darauf folgend werden ebenfalls Berechnungen mit Vorticity-Confinement-Ansätzen diskutiert und die Möglichkeiten der Wirbelausbreitung auf Netzen der Stufe I und Stufe II mit geringerer Auflösung mit den Ausgangsberechnungen auf dem Netz der Stufe III verglichen.

Zielgrößen zur Bewertung der einzelnen numerischen Lösungen sind zum einen Auftriebs- und Widerstandsbeiwert und zum anderen Eigenschaften des Spitzenwirbels. Die Kenngrößen des Spitzenwirbels sind der Druckverlauf im Wirbelkern und die radialen Geschwindigkeitsprofile. Aufmessungen der Geschwindigkeitsprofile in kurzem Abstand stromabwärts zur Tragflügelspitze liegen vor. Gerade in diesem Bereich ist ein starker Geschwindigkeitsgradient anzutreffen. Hohe Geschwindigkeitsgradienten in Kombination mit einer hohen Geschwindigkeitsmagnitude sind nur durch feine Netzauflösungen abzubilden. Stromabwärts nimmt der Geschwindigkeitsgradient und die Geschwindigkeitsmagnitude aufgrund der turbulenten Dissipation jedoch stark ab, so dass hier unter Verwendung von Vorticity Confinement eine genauere Abbildung des Spitzenwirbels möglich sein wird.

#### 6.2.3.1 Wirbelausbreitung

Zur Bewertung der numerischen Lösung werden aufgemessene Geschwindigkeitsprofile aus [14] herangezogen. Eine Vielzahl von Aufmessungen liegt für Bereiche dicht hinter dem Tragflügel vor. Für die Bereiche  $\frac{x}{c_{max}} = 0,5$  bis  $\frac{x}{c_{max}} = 1,0$  wurden Messungen in neun Ebenen im Querschnitt des Spitzenwirbels durchgeführt. Weiter stromabwärts liegen ebenfalls Ergebnisse bis zum Abstand  $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$  vor. Die Abb. 6.29 und Abb. 6.30 zeigen die Geschwindig-

keitsprofile im Abstand  $\frac{x}{c_{max}} = 0,75$  und  $\frac{x}{c_{max}} = 1,0$  hinter der Profileintrittskante sowohl der Versuche im Kavitationstank als auch die Ergebnisse der durchgeführten CFD-Berechnungen. Im Bereich der Tragflügelspitze ist ein sehr ausgeprägter Spitzenwirbel mit hoher Tangentialgeschwindigkeit und hohem Geschwindigkeitsgradienten zu beobachten.

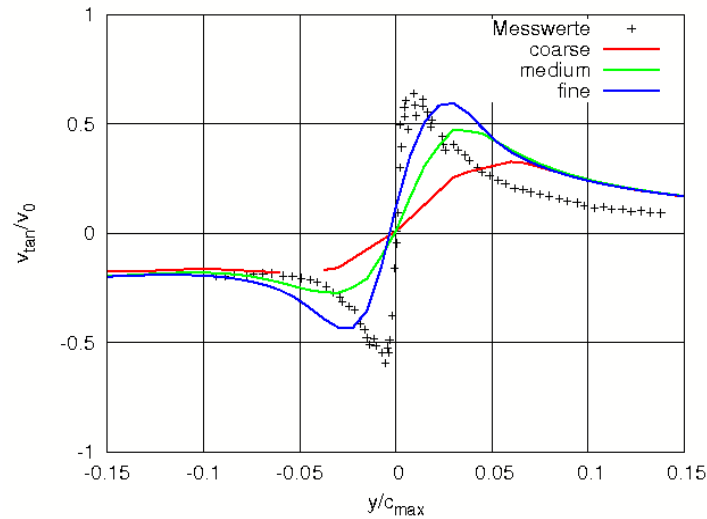


Abbildung 6.29: Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche,  $\frac{x}{c_{max}} = 0,75$

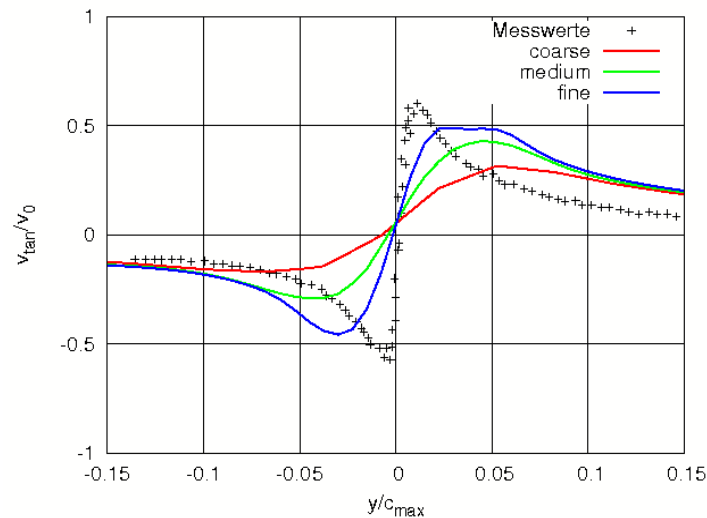


Abbildung 6.30: Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche,  $\frac{x}{c_{max}} = 1,0$

Die CFD-Ergebnisse für die einzelnen Netzauflösungen zeigen einen deutlich abgeflachten Verlauf bereits für Bereiche nah hinter dem Tragflügel. Lediglich anhand der feinen Netzauflösung kann ein annähernd ausreichender Geschwindigkeitsgradient abgebildet werden. Die

Tangentialgeschwindigkeit für das feine Netz liegt ebenfalls im Bereich der Messwerte während für die Netze mit geringerer Auflösung die Tangentialgeschwindigkeiten deutlich geringer sind. Da für die Abbildung des Spitzenwirbles eine möglichst genaue Abbildung der Turbulenz notwendig ist, ist anzumerken, dass die Transportgleichungen des Turbulenzmodells ebenfalls mit dem QUICK-Verfahren gelöst werden.

Die folgenden Abb. 6.31 und 6.32 zeigen den Tangentialgeschwindigkeitsverlauf weiter stromabwärts für  $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$  und  $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$ . Während für  $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$  im Experiment noch ein scharfer Wirbel zu erkennen ist, sind gerade auf den gröber aufgelösten Netzen die Abweichungen zu den Testdaten so hoch, dass es zu einer verfälschten Lösung und Auflösung des Spitzenwirbels in diesen Bereichen kommt. Lediglich die Berechnung auf dem feinen Netz zeigt für  $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$  noch eine akzeptable Übereinstimmung. Für  $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$  liegen keine Messdaten vor, so dass diese Auswertung nur dem Vergleich der unterschiedlichen CFD-Berechnungen dient. Eine Annäherung der CFD-Berechnungen auf allen Netzen ist für grössere Abstände hinter dem Tragflügel festzustellen. Bereits bei  $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$  nähern sich die Lösungen für das feine und das mittlere Netz an.

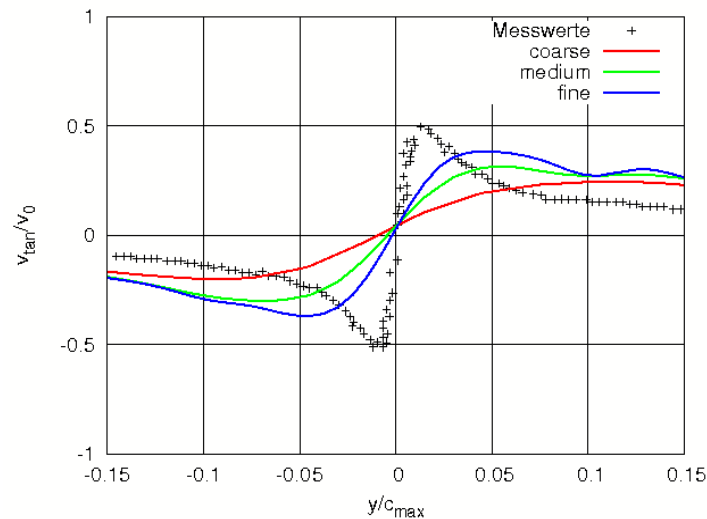


Abbildung 6.31: Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche,  $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$

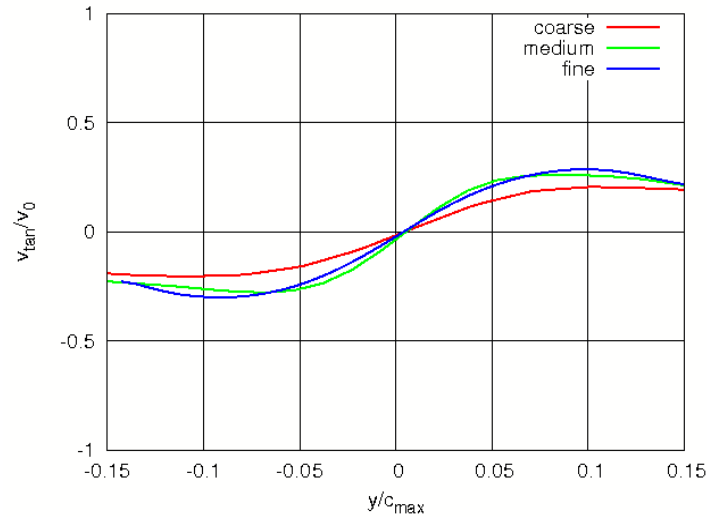


Abbildung 6.32: Tangentialgeschwindigkeitsprofile für drei unterschiedliche Netzauflösungen stromabwärts der Tragfläche,  $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$

Betrachtet man nun die Berechnungen mit Vorticity Confinement, so ist festzustellen, dass für die Bereiche stromabwärts des Tragflügels die Umfangsgeschwindigkeit des Spitzenwirbels auf das Niveau der Berechnung mit dem fein aufgelösten Netz erfolgen kann. Grundlage für die korrekte Abbildung ist die richtige Auswahl des Parameters  $\varepsilon$  welcher die Stärke des einzubringenden wirbelerhaltenden Terms bestimmt. Eine grundsätzliche Abschätzung des Parameters  $\varepsilon$  ist über die Betrachtung der Isoflächen im Spitzenwirbel möglich. Um Stabilitätsprobleme zu verhindern, wird  $\varepsilon$  während einer Berechnung schrittweise erhöht. Diese Schritte eignen sich hervorragend zur Abschätzung der richtigen Größe von  $\varepsilon$ . Zu geringe Werte von  $\varepsilon$  zeigen keine gewünschte Verbesserung der Ausbreitung des Spitzenwirbels, zu hohe Werte von  $\varepsilon$  verfälschen hingegen die numerische Lösung bis hin zu unrealistischen Wirbelausbreitungen. Diese Abschätzung muss vom Nutzer durchgeführt werden, entspricht jedoch jeder normalen kritischen Betrachtung einer CFD-Berechnung.

Die folgenden Abb. 6.33 - 6.35 zeigen Isoflächen für 70000 Pa mit Blick auf die Druckseite des Tragflügels zunächst für die Ausgangsberechnungen auf dem groben, mittleren und feinen Netz. Zielsetzung ist die Auswahl des Parameters  $\varepsilon$  auf dem groben Netz so zu treffen, dass eine Vergleichbarkeit zur Berechnung auf dem feinen Netz möglich ist.



Abbildung 6.33: Isofläche für  $p=70000$  Pa, grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels

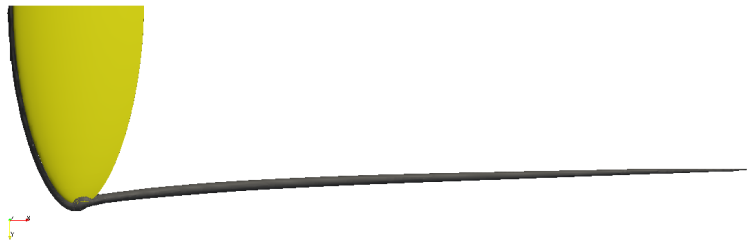


Abbildung 6.34: Isofläche für  $p=70000$  Pa, mittlere Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels

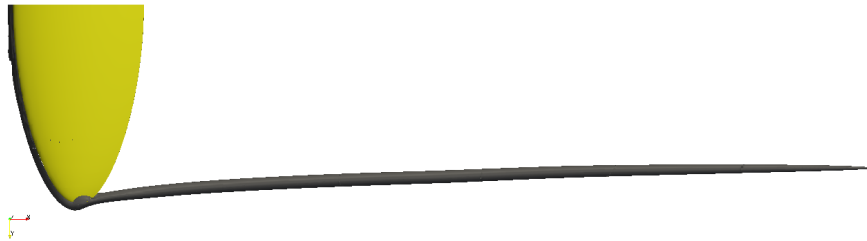


Abbildung 6.35: Isofläche für  $p=70000$  Pa, feine Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels

Bereits aus den Betrachtungen der Tangentialgeschwindigkeiten im Spitzenwirbel war zu erwarten, dass die Druckabsenkung im Spitzenwirbel auf dem groben Netz nicht ausreichend abgebildet werden kann wie auf den Abbildungen der Isobaren zu sehen ist. Betrachtet man nun die Berechnungen mit Vorticity Confinement so erscheinen plausible Lösungen für Bereiche  $0,05 < \varepsilon < 0,1$ . Die Wirbelstruktur kann über eine annähernd lange Strecke aufrechterhalten werden mit einem vergleichbaren Ergebnis wie auf dem feinen Netz. Die Abb. 6.36 und Abb. 6.37 zeigen analog zu den vorherigen Abbildungen die Isoflächen für den Druck  $p=70000$  Pa zum einen für  $\varepsilon = 0,05$  und zum anderen für  $\varepsilon = 0,1$ .



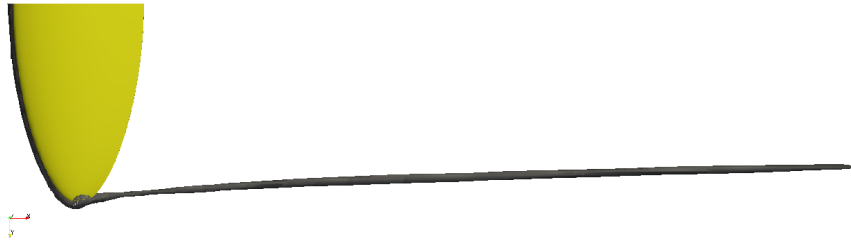


Abbildung 6.36: Isofläche für  $p=70000$  Pa,  $\varepsilon = 0,05$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels

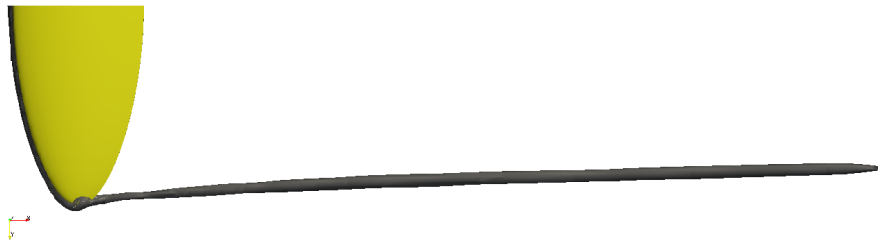


Abbildung 6.37: Isofläche für  $p=70000$  Pa,  $\varepsilon = 0,1$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels

Betrachtet man nun die Umfangsgeschwindigkeiten der Berechnungen mit Vorticity Confinement, so kann noch eine weitere Anpassung für  $\varepsilon$  vorgenommen werden. Als Referenz dient hier die Berechnung des feinen Netzes. Es kann eine gute Übereinstimmung in der Magnitude der Umfangsgeschwindigkeit für die Bereiche  $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$  und  $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$  für  $\varepsilon = 0,1$  erzielt werden.

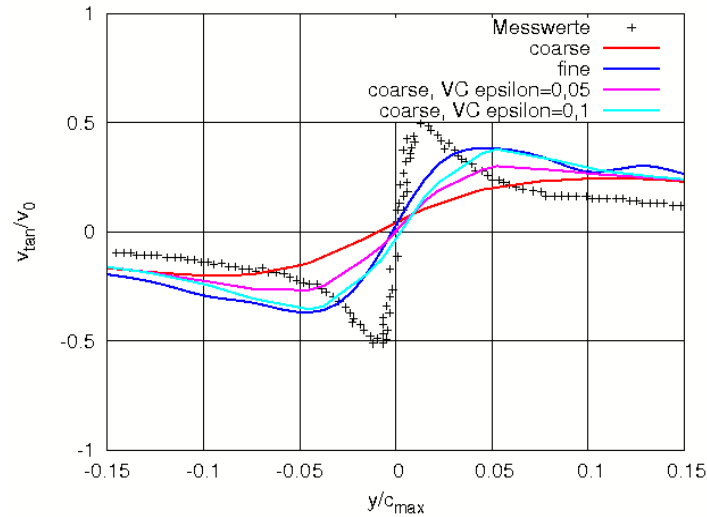


Abbildung 6.38: Tangentialgeschwindigkeitsprofile stromabwärts der Tragfläche für Berechnungen mit Vorticity Confinement,  $\frac{x}{c_{max}} = 2,5$

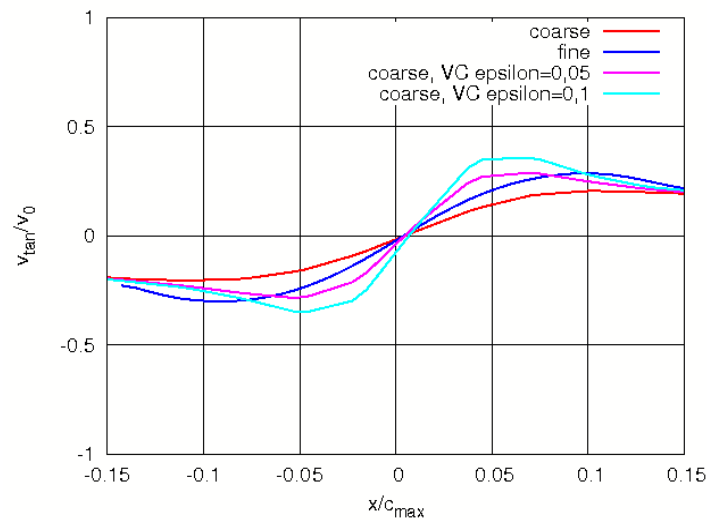


Abbildung 6.39: Tangentialgeschwindigkeitsprofile stromabwärts der Tragfläche für Berechnungen mit Vorticity Confinement,  $\frac{x}{c_{max}} = 5,0$

Da natürlich nicht immer Versuchsergebnisse oder Referenzberechnungen mit hoch aufgelösten Netzen vorliegen, muss durch eine ingenieurmäßige Abschätzung ein geeigneter Wert für den Parameter  $\varepsilon$  gefunden werden. Da es sich bei der Nutzung des Vorticity Confinement in Verbindung mit dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren nur um einen örtlich begrenzten Ansatz handelt, basierend auf einer Wirbelkernlinie, bleibt ein Großteil der numerischen Lösung unbeeinflusst. Im Gegensatz zu Wirbelfindungsalgorithmen, welche als Ergebnis keine Wirbel-

kernlinie haben (wie z.B. das  $\Lambda^2$ -Kriterium) ist somit die Überprüfung dieses Verfahrens auf einfache Weise möglich.

Bisherige Berechnungen wurden einphasig durchgeführt. Führt man zweiphasige Berechnungen mit einem Euler-Euler-Kavitationsmodell durch, so kann der Vorteil der Vorticity-Confinement Formulierung auch auf kavitierende Strömungen überführt werden. Während Bereiche großvolumiger Kavitationsgebiete unangetastet bleiben, kann gezielt die Spitzenwirbelkavitation aufrecht erhalten werden. Berechnungen wurden durchgeführt mit dem Sauer-Kavitationsmodell und einer Kavitationszahl von  $\sigma = 0,1$  unter Einhaltung der in den einphasigen Strömungen verwendeten Parametern, wie z.B. für die Turbulenzmodellierung und die Modellierung der konvektiven Terme. In beiden Berechnungen ist die Saugseite des Tragflügels mit Schichtkavitation bedeckt. Für die Berechnung ohne Vorticity Confinement kann ein Abklingen der Kavitation im Spitzenwirbel bereits kurz hinter der Tragflügelspitze festgestellt werden. Analog zu den einphasigen Berechnungen kann bei der Berechnung mit Vorticity Confinement ein Aufrechterhalten der Spitzenwirbelkavitation erzielt werden. Der Wert für den Parameter  $\varepsilon$  mit  $\varepsilon = 0,1$  konnte aus den vorherigen Berechnungen erfolgreich übernommen werden. Eine Anpassung ist somit nicht notwendig.



Abbildung 6.40: Dampfdruckgebiet,  $\alpha = 0,01$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels



Abbildung 6.41: Dampfdruckgebiet,  $\alpha = 0,01$ ,  $\varepsilon = 0,1$ , grobe Netzauflösung, Blickrichtung auf Druckseite des Tragflügels

Abschließend kann gesagt werden, dass die Ergebnisse der Berechnungen am Tragflügel zufriedenstellende Ergebnisse liefern und eine Eignung der vorgestellten Vorticity Confinement

Formulierung auch für die Modellierung kavitierender Strömungen geeignet ist. Das Niveau der Umfangsgeschwindigkeit in Spitzenwirbeln kann künstlich aufrechterhalten werden. Lediglich der hohe Geschwindigkeitsgradient kann nicht erreicht werden, was aufgrund der geringen Netzauflösung und somit fehlenden örtlichen Diskretisierung nicht möglich ist. Als weiterer Testfall werden nun, nach den Spitzenwirbeln des Tragflügels mit nahezu geradliniger Ausbreitung, Spitzenwirbel eines Propellers untersucht.

### 6.3 Propeller

Propeller gehören zu der Familie der Arbeitsmaschinen. Ihre Hauptaufgabe besteht darin eine Schubkraft zu erzeugen. Die vom Motor aufgebrachte Antriebsleistung wird in eine Nutzleistung umgewandelt. Ein Propeller arbeitet nach dem Tragflügelprinzip. Dementsprechend sind auch die Querschnitte der einzelnen Propellerflügel als Tragflügelprofile ausgebildet. Betrachtet man die Auftriebsverteilung über den Propellerflügel als konstant, so ergibt sich für jeden Propellerflügel ein Hufeisenwirbel. Jeder Propellerflügel besitzt einen gebundenen Wirbel und einen freien Wirbel an der Propellerspitze. Die freien Wirbel an der Propellernabe bilden den Nabenwirbel. Im Vergleich zum geraden Tragflügel führen jedoch die Propellertragflügel (Propellerflügel) zusätzlich eine Schraubenbewegung aus, welche sich aus der Überlagerung der Fortschrittsgeschwindigkeit des Schiffes und der Rotationsgeschwindigkeit des Propellers ergibt. Zudem ändert sich die Auftriebsverteilung als Funktion des Radius. Zusätzlich zu den Tragflügelenden an der Nabe und der Propellerspitze verlassen somit Wirbelbänder den Propellerflügel über den gesamten Radius [41], [48]. Betrachtet man die Wirbelausbreitung kavitierender Wirbel hinter einem Propeller in einem Kavitationstank, so ist das Wirbelbild gekennzeichnet durch einen stark ausgeprägten Nabenwirbel und die weniger stark ausgeprägten Spitzenwirbeln. In diesen Wirbeln tritt bei ausreichender Belastung des Propellers Wirbelkavitation auf. Diesen Wirbeln gilt in den folgenden numerischen Berechnungen besondere Aufmerksamkeit, da diese aufgrund hoher Dissipation nur unzureichend abgebildet werden können und somit die Wirbelkavitation nur unzureichend vorhergesagt bzw. modelliert werden kann. Für den untersuchten Propeller wurde die Propellerumströmung, wie sie im Propellerfreifahrtversuch vorliegt, modelliert. Der Propeller befindet sich in freier ungestörter Anströmung und wird mit konstanter Drehzahl  $n$  betrieben und einer Geschwindigkeit  $v_a$  angeströmt. In der Simulation entspricht die Anströmgeschwindigkeit der am Inlet angegebenen Einlassgeschwindigkeit der Dirichlet-Randbedingung ( $v=v_a$ ). Die Rotation des Propellers wird durch ein rotierendes zylinderförmiges Rechennetz abgebildet. Der Propeller und die Propellerwelle werden ebenfalls als Dirichlet-Bedingung (Haftbedingung,  $v=0$ ) modelliert. Gemessen wird der Schub  $T$  und das Drehmoment  $Q$  für unterschiedliche Fortschrittsgrade  $J$ , aus welcher

sich die erforderlichen Daten für das Propellerfreifahrt diagramm berechnen lassen. Der Fortschrittsgrad eines Propellers ist wie folgt definiert:

$$J = \frac{v}{nD} \quad (6.8)$$

Die weiteren im Propellerfreifahrt diagramm aufgeführten Kennwerte sind die Schub- und Drehmomentenbeiwerte  $K_T$  und  $K_Q$  sowie der Freifahrtwirkungsgrad  $\eta_0$ . Die genannten Kennwerte werden anhand folgender Formeln berechnet:

$$K_T = \frac{T}{n^2 D^4} \quad (6.9)$$

$$K_Q = \frac{Q}{n^2 D^5} \quad (6.10)$$

$$\eta_0 = \frac{2\pi}{J} \frac{K_T}{K_Q} \quad (6.11)$$

Ziel der durchgeführten Berechnungen ist, die Abweichung der Kennwerte des Propellerfreifahrt diagramms aufgrund der eingeführten Vorticity-Confinement-Formulierung so gering wie möglich zu halten. Da die Beeinflussung der Grenzschicht aufgrund der Wirbeldetektion völlig ausgeschlossen werden kann, wird keine erkennbare Beeinflussung erwartet.

### 6.3.1 INSEAN E779a

Der Propeller INSEAN E779a ist ein rechtsdrehender vierflügeliger Propeller. Das Design stammt bereits aus dem Jahr 1959. Der Propeller wurde für eine Fähre als Zweischauber mit zwei gegenläufigen Propellern entworfen. Es handelt sich um eine Abwandlung der Wageningen-Serie. Die Hauptparameter des E779a sind wie folgt:

$$\begin{aligned} D_m &= 227,2 \text{ mm} \\ Z &= 4 \\ \frac{P_m}{D} &= 1,1 \\ \text{Rake} &= 4^\circ 3'' \\ c &= 86 \text{ mm} \end{aligned}$$

$D_m$  ist der Propellerdurchmesser im Modellmaßstab,  $Z$  die Flügelanzahl,  $\frac{P_m}{D}$  das mittlere Steigungsverhältnis,  $c$  die Sehnenlänge bei  $\frac{r}{R} = 0,7$  und *Rake* der Hang (Rake) des Propellers. Der Hang beschreibt den Winkel des Propellers zur Nabe und ist in diesem Fall nach vorn gerichtet. Die Abb. 6.43 zeigt die Propellerzeichnung und die Abb. 6.44 und die Abb. 6.45 zeigen den Propeller in dreidimensionaler Ansicht, wie er zur Berechnung verwendet wurde.

Bereits in den 80er Jahren wurde dieser Propeller mit Laser-Doppler-Geschwindigkeitsmessung (LDV) untersucht. Weitere Messdaten liegen aus neueren Untersuchungen (ab 1997) vor. Geschwindigkeiten wurden sowohl mit LDV als auch mit 2D-Particle Image Velocimetry (PIV) gemessen.

### 6.3.1.1 Rechengitter

Bei dem Rechengitter des E779a handelt es sich um ein hierarchisch strukturiertes Rechengitter, welches mit der Vernetzungssoftware HEXPRESS der Firma NUMECA erstellt wurde. Das Gitter wurde bereits zuvor am Institut für Fluidodynamik und Schiffstheorie der TUHH für Untersuchungen der Propellerumströmung verwendet. Es handelt sich um ein Gitter mit 565089 Hexaederelementen und 1182392 Punkten. Das Rechengitter wurde im Bereich der Spitzenwirbel und des Nabenwirbels lokal verfeinert um eine Ausbreitung dieser Wirbel besser erfassen zu können.

In den Abb. 6.47-6.49 sind Schnitte durch das Rechennetz des Propellers zu sehen. Die hierarchische Struktur des Gitters ist deutlich an den Übergängen von groben zu feinen Vernetzungsgebieten zu erkennen. Ebenso deutlich ist die Verfeinerung in den für die Wirbelausbreitung wichtigen Gebieten hinter dem Propeller. In der Abb. 6.46 ist das Oberflächennetz des E779a zu sehen. Sowohl für den Propeller als auch für die Propellerwelle wurde eine ähnliche Gitternetzauflösung gewählt. Auf typische Verfeinerungen im Bereich der Eintritts- und Austrittskante der Propellerflügel wurde verzichtet, um die Zellenanzahl möglichst gering zu halten.

### 6.3.1.2 Rechenergebnisse

Berechnungen für den E779a wurden für fünf unterschiedliche Fortschrittsgrade durchgeführt. Die zugehörigen Anströmgeschwindigkeiten und Propellerdrehzahlen ergeben sich aus der Tabelle 6.3.

Tabelle 6.3: Rechengitter

$J$	0,65	0,71	0,771	0,830	0,879
$v_a \left[ \frac{m}{s} \right]$	5,32	5,81	6,31	6,79	7,19
$n \left[ \frac{1}{s} \right]$	36	36	36	36	36

Berechnungen des Propellers wurden zunächst ohne Vorticity-Confinement-Formulierung durchgeführt. Aufgrund der Rotation des Propellers handelt es sich um transiente Berechnungen. Der Zeitschritt zur Berechnung des Propellers wurde so gewählt, dass genau 100 Zeitschritte einer Propellerumdrehung entsprechen. Pro Zeitschritt führt der Propeller dementsprechend eine Umdrehung von  $3,6^\circ$  durch. Die Diskretisierung der konvektiven Terme erfolgte bereits in den Ausgangsberechnungen mit dem QUICK-Verfahren, um die Dissipation gering zu halten. Die Turbulenzmodellierung erfolgte mit dem  $k-\omega$ -Turbulenzmodell. Zur Bestimmung konstanter Kraft- und Drehmomentwerte waren 300 Zeitschritte bzw. drei Propellerumdrehungen notwendig. Die Abb. 6.52 und Abb. 6.53 zeigen zunächst die typischen Druckverteilungen auf der Druckseite und der Saugseite des Propellers.

Auf der Basis der durchgeführten Berechnungen erfolgte die Bestimmung der Spitzenwirbelzentren nach dem zuvor beschriebenen Verfahren für nichtkavitierende Strömungen. Die Detektion wurde 100 mm hinter dem Propeller gestartet und sowohl stromabwärts als auch stromaufwärts weiter geführt. Die ermittelten Wirbelkernpunkte sind in der Abb. 6.54 und 6.55 zu sehen.

Auf der Basis der Wirbelkernlinie wird der für das Vorticity-Confinement gültige Bereich mit dem dreifachen Radius des Wirbelkerns definiert. In den folgenden Abb. 6.56 und 6.57 wird die Isofläche der in der Rechnung notwendigen zusätzlichen Variablen zur Bestimmung des detektierten Wirbelbereichs mit dem Isowert  $\gamma = 0,01$  gezeigt. Innerhalb dieser Isofläche wird der künstliche wirbelaufrechterhaltende Term eingebracht.

Anhand der Wirbeldetektion werden ausschließlich Bereiche ermittelt, in denen die wirbelaufrechterhaltenden Maßnahmen erwünscht sind. Die Grenzschicht wird ebenso wie kleinere Wirbel nicht berücksichtigt. Die Aufweitung des Bereichs an den Enden der detektierten Bereiche ist auf das Rechnetz zurückzuführen. Ab diesem Bereich steigt die Zellgröße sprunghaft an, da der verfeinerte Bereich hier endet.

Die Stärke der einzubringenden Kraftterme wurde beginnend bei  $\varepsilon = 0,1$  mit einem  $\Delta\varepsilon = 0,01$  bis zu einem Wert von  $\varepsilon = 1,0$  in den definierten Bereich eingebracht. Diese Vorgehensweise war notwendig, da ein sofortiges Einbringen mit einem  $\varepsilon = 1,0$  zur Divergenz des Rechenver-

fahrens führte. Die folgenden beiden Abbildungen zeigen Isoflächen des Drucks zum einen der Ausgangsberechnung und zum anderen der Berechnung mit Vorticity Confinement.

Die Abb. 6.58 zeigt eine Isofläche des Drucks der Berechnung ohne Vorticity-Confinement, während die Abb. 6.59 eine Isofläche desselben Drucks der Berechnung des auf der Wirbel-detektion basierende Vorticity-Confinements mit  $\varepsilon = 1,0$  zeigt. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Verlängerung des Gebietes niedrigen Drucks der Spitzenwirbel hinter dem Propeller. Eine Verfolgung der Spitzenwirbel ist bis zum sprunghaft größer werdenden Netz möglich. Erst ab diesem Bereich reicht die notwendige Rechennetauflösung zur Abbildung von Wirbelstrukturen mit den Abmessungen eines Spitzenwirbels nicht mehr aus. Betrachtet man das in Abb. 6.42 dargestellte Propellerfreifahrtdiagramm des E779a, so lässt sich zwischen den Berechnungen mit und ohne Vorticity-Confinement nur eine geringe Abweichung feststellen.

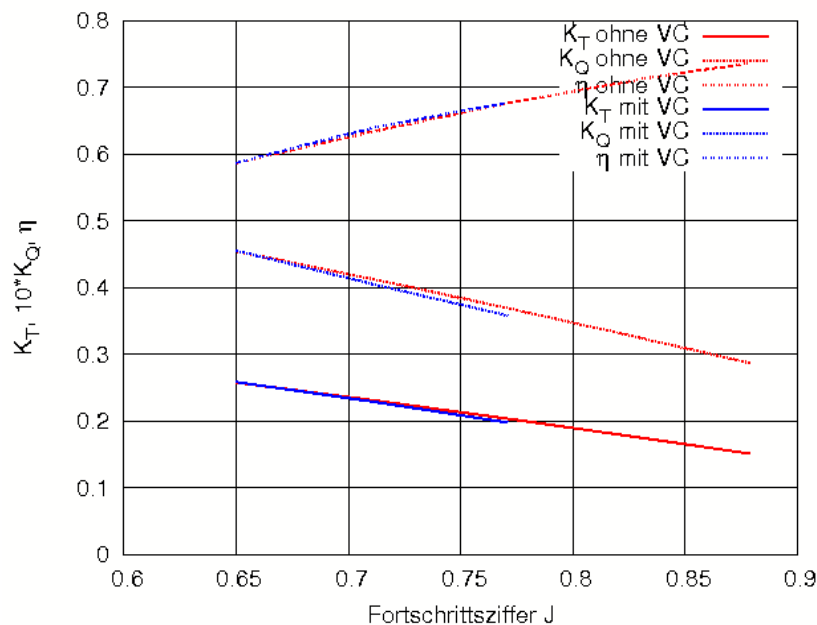


Abbildung 6.42: Propellerfreifahrtdiagramm

Gute Übereinstimmungen sind, wie in der folgenden Tabelle 6.4 dargestellt, ebenso mit den Versuchsergebnissen festzustellen.

Tabelle 6.4: Schub- und Drehmomentenbeiwerte für  $J=0,65$

	$K_T$	$10 * K_Q$
Messwerte	0,29	0,51
Berechnung ohne VC	0,26	0,47
Berechnung mit VC	0,26	0,47



Analog zu den Berechnungen des Tragflügels im vorherigen Kapitel werden die Einstellungen des Vorticity Confinement für einphasige Strömungen für Berechnungen mit Kavitationsmodellierung übernommen. Zunächst erfolgte die Berechnung des Propellers unter Anwendung des Sauer-Kavitationsmodells. Es wurden Berechnungen für den Fortschrittsgrad  $J = 0,65$  durchgeführt.

Die Berechnungen zeigen eine deutlich verlängerte Dampfphase für die Berechnung mit Vorticity Confinement. Während in Abb. 6.50 kein Spitzenwirbel zu erkennen ist, sind in Abb. 6.51 die Spitzenwirbel der einzelnen Propellerflügel über eine halbe Umdrehung zu verfolgen. Eine weitere Absenkung der Kavitationszahl würde zu einer noch weiteren Ausbreitung der Dampfphase führen, da die Bereiche der Wirbelverfolgung die der Dampfphase deutlich überschreiten.

Zum Abschluss wurde die einphasige Propellerberechnung noch mit dem parallel am Institut für Fluidodynamik und Schiffstheorie entwickelten Euler-Lagrange-Kavitationsmodell gekoppelt. Die folgenden Abbildungen 6.60 und 6.61 zeigen die Lagrange-Blasen im Rechengebiet für jeweils eine Berechnung mit und ohne Vorticity Confinement. Diese werden in der Berechnung mit Vorticity Confinement deutlich weiter transportiert, als in der Berechnung ohne Vorticity Confinement. Aufgrund des geringeren Druckniveaus im Wirbelkern fallen diese Blasen erst weiter hinter dem Propeller in sich zusammen. Die Rückwirkung der diskreten Kavitationsblasen auf das Rechengebiet wird ebenfalls dargestellt anhand der Isofläche für den Dampfvolumenteil.

Wie die Ergebnisse der Berechnungen mit Vorticity Confinement zeigen, ist eine Verfolgung der Spitzenwirbel eines Propellers mit einer für einen Propeller geringen Anzahl von Rechenzellen möglich. Dieses ist insbesondere für Berechnungen einer Schiff-Propeller-Kombination von Bedeutung. Während im Propellerfreifahrtversuch eine ausreichend feine Auflösung des Rechnetze vertretbar ist, ist für einen Propulsionsversuch mit Abbildung der Schiffsgeometrie eine Netzauflösung ähnlich einer Auflösung im Propellerfreifahrtversuch nicht vertretbar. Hier biete sich der Einsatz von Vorticity Confinement an. Abschätzungen können so auf einfache und effektive Weise auch für Schräganströmung getroffen werden.

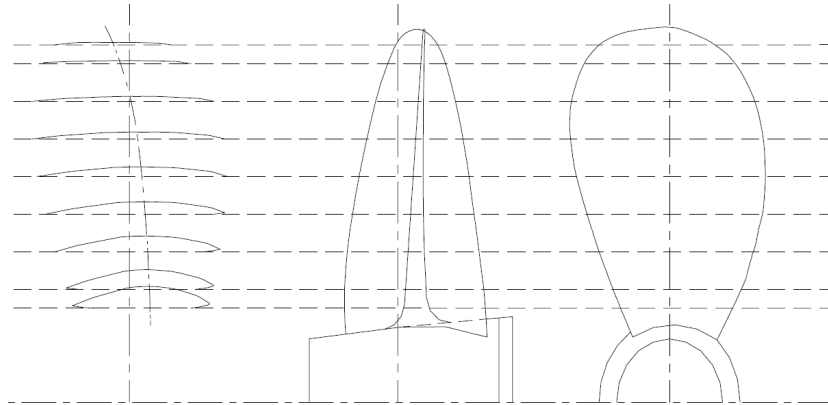


Abbildung 6.43: Geometrie des Propellers E779a [7]

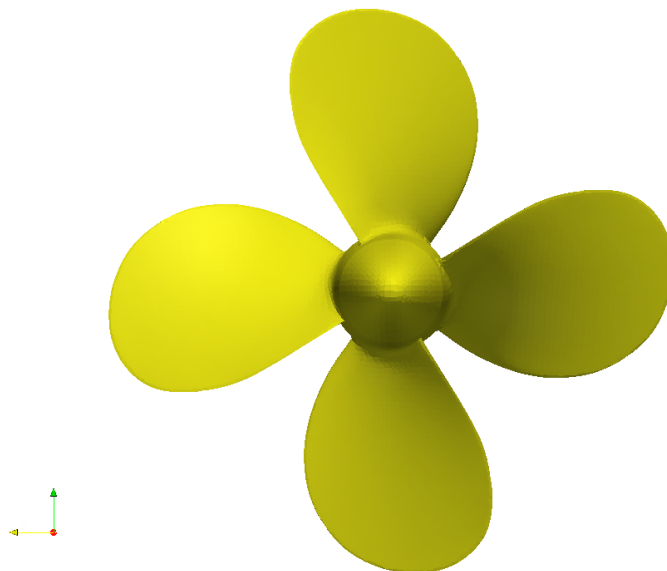


Abbildung 6.44: Geometrie des Propellers E779a, Ansicht in x-Richtung

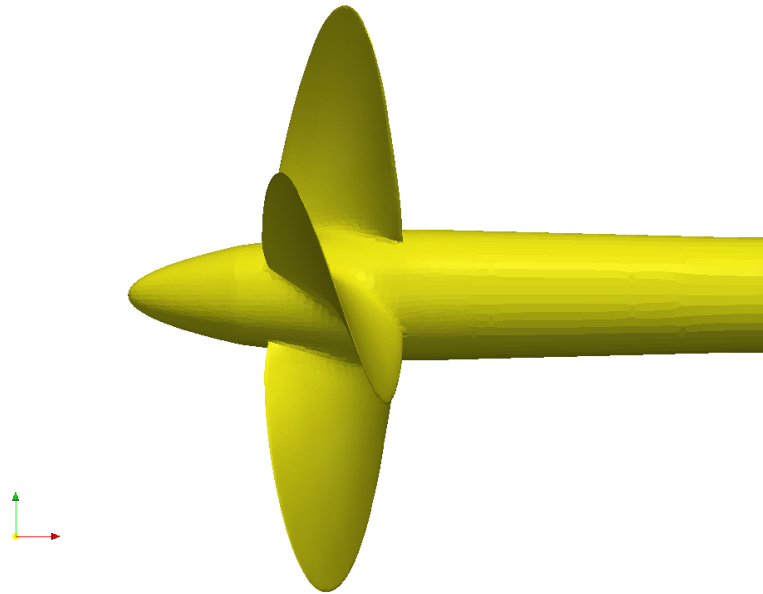


Abbildung 6.45: Geometrie des Propellers E779a, Ansicht in y-Richtung

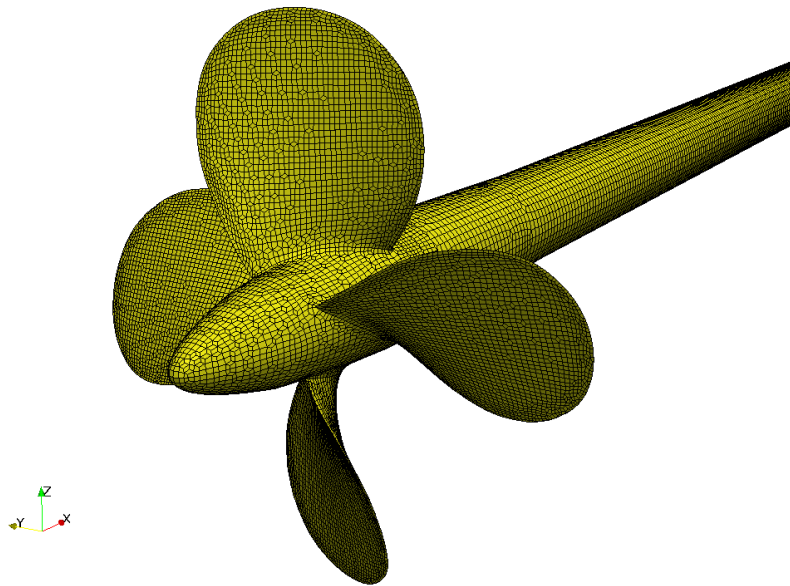


Abbildung 6.46: Oberflächennetz des Propellers E779a

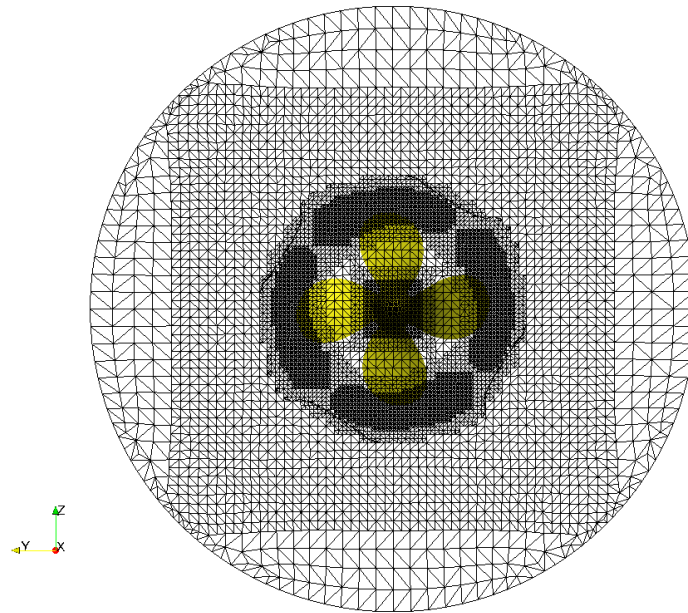


Abbildung 6.47: Rechennetz des Propellers E779a, Ansicht in x-Richtung

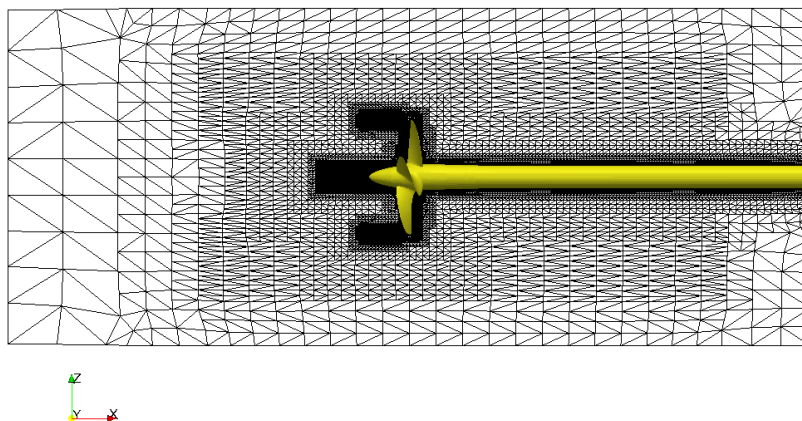


Abbildung 6.48: Rechennetz des Propellers E779a, Ansicht in y-Richtung

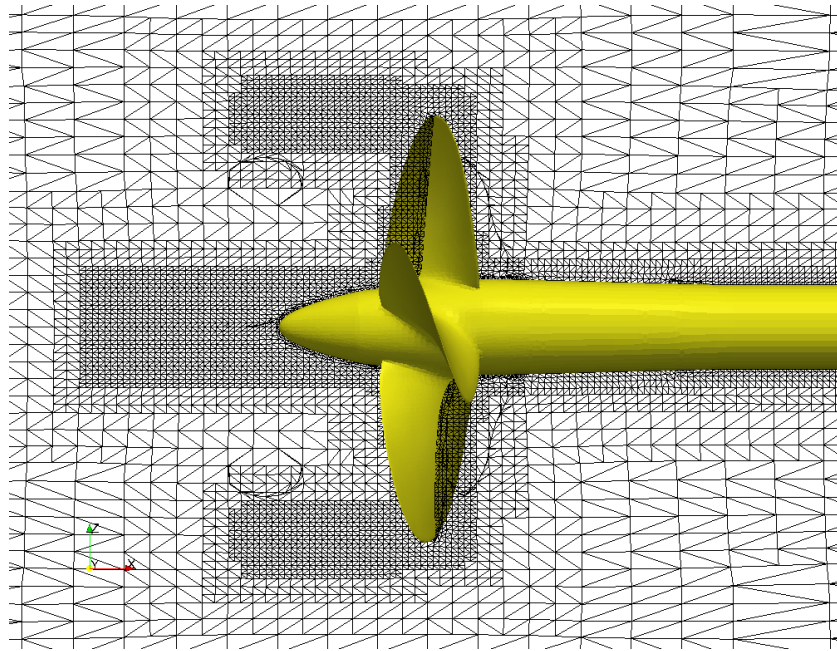


Abbildung 6.49: Rechennetz des Propellers E779a, Detailansicht in y-Richtung

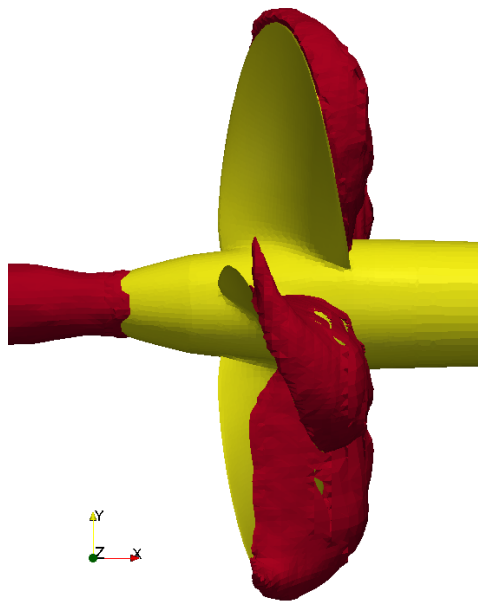


Abbildung 6.50: Dampfdruckgebiet, Ausgangsberechnung

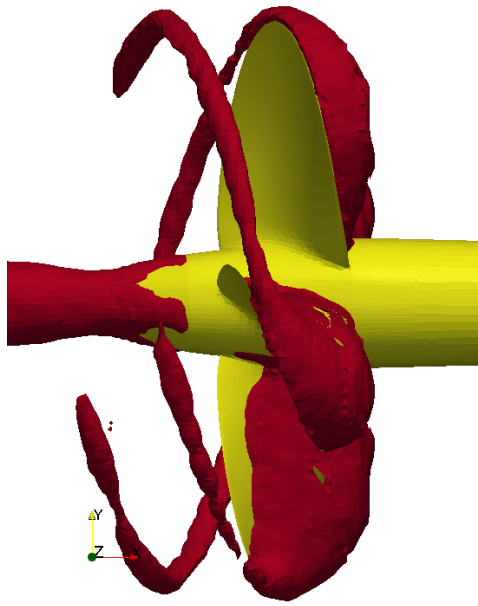


Abbildung 6.51: Dampfdruckgebiet, Berechnung mit Vorticity Confinement,  $\varepsilon = 1.0$

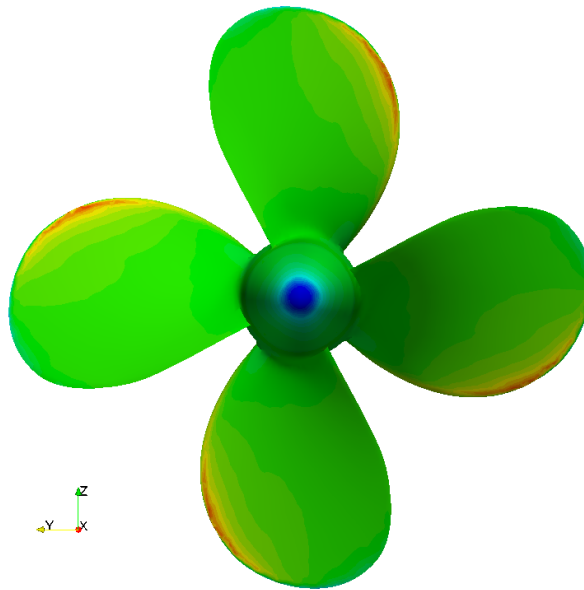


Abbildung 6.52: Druckverteilung auf der Druckseite des E779a

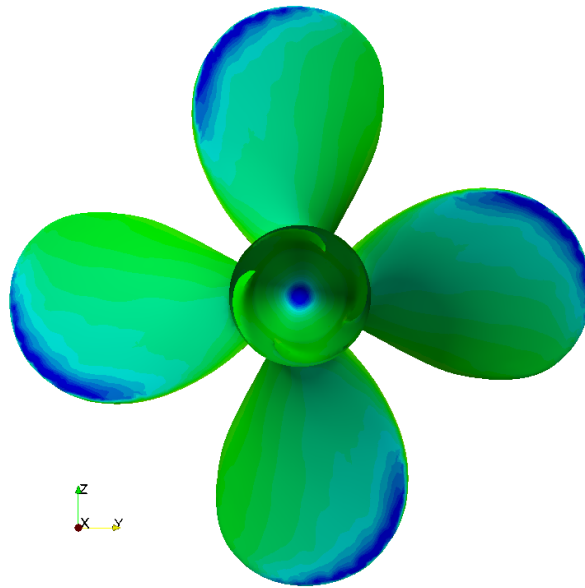


Abbildung 6.53: Druckverteilung auf der Saugseite des E779a

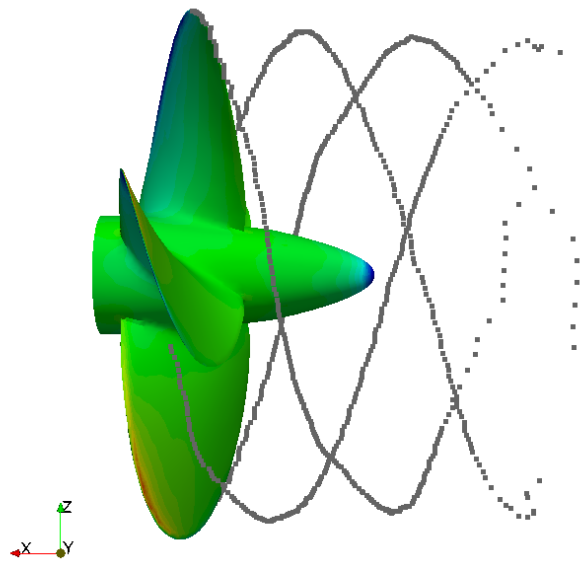


Abbildung 6.54: Punkte der Wirbelkernlinien

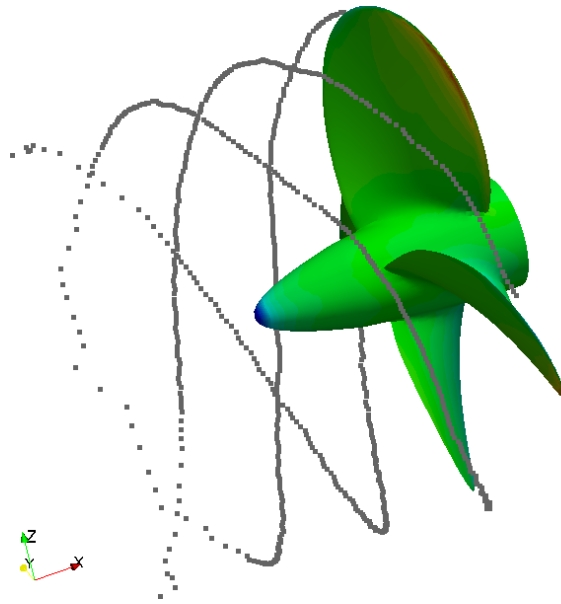


Abbildung 6.55: Punkte der Wirbelkernlinien, Isometrie

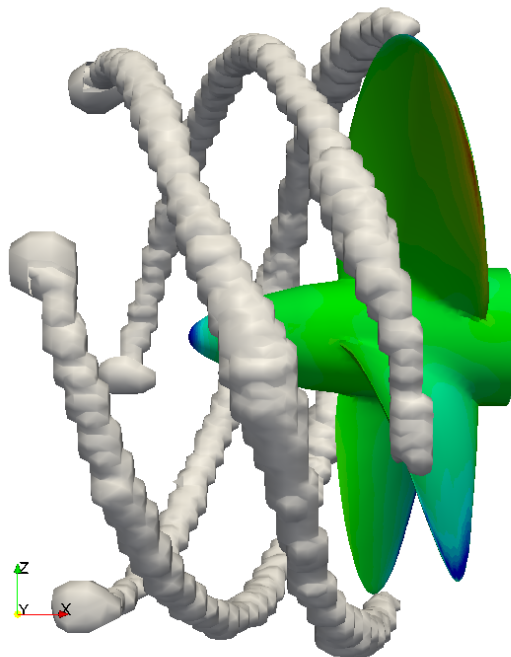


Abbildung 6.56: Isofläche für  $\gamma = 0,01$



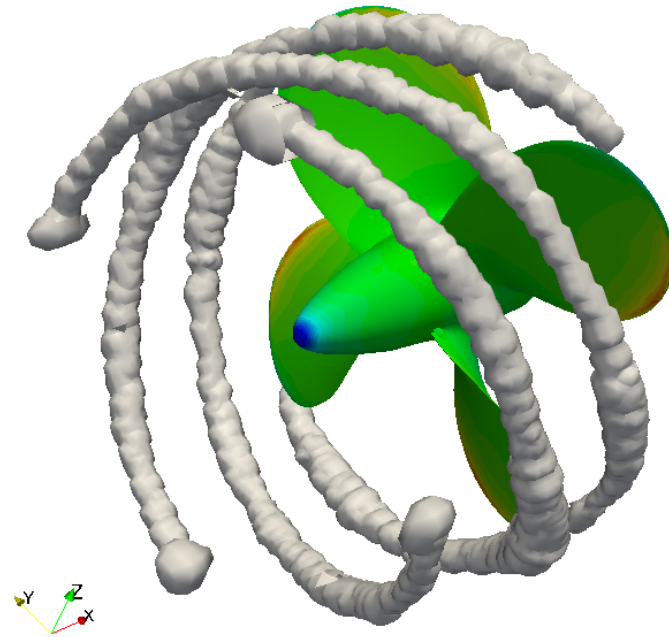


Abbildung 6.57: Isofläche für  $\gamma = 0,01$ , Isometrie

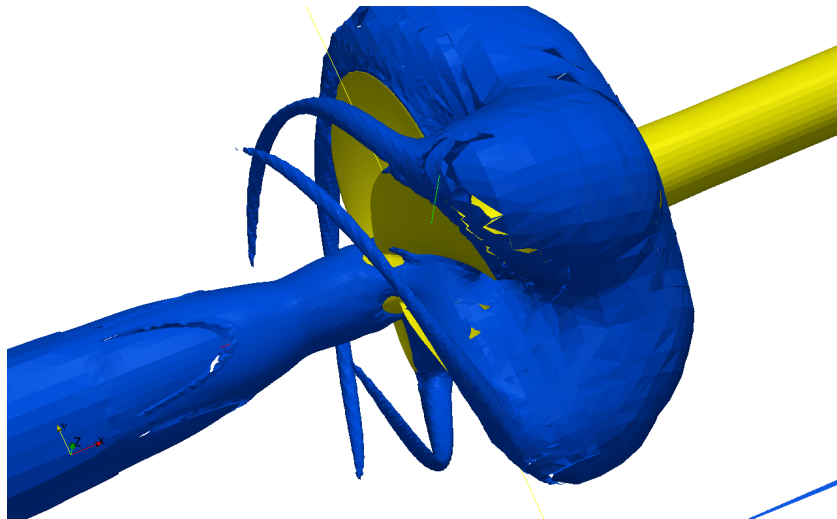


Abbildung 6.58: Isofläche des Drucks  $p$  der Berechnung ohne Vorticity Confinement

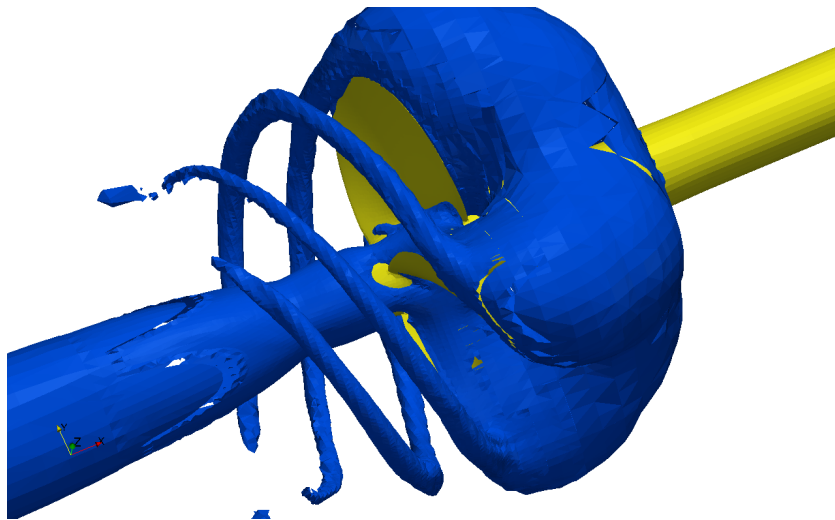


Abbildung 6.59: Isofläche des Drucks  $p$  der Berechnung mit Vorticity Confinement,  $\varepsilon = 1,0$

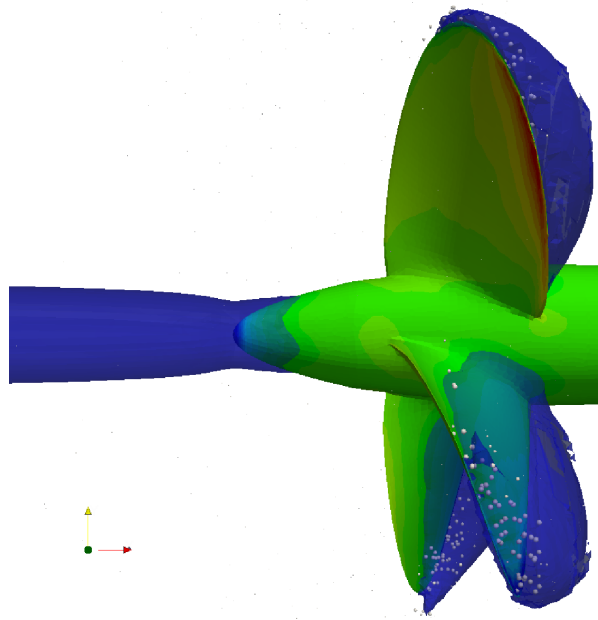


Abbildung 6.60: Kavitationsblasenverteilung, Euler-Lagrange Kavitationsmodell, Ausgangsberechnung

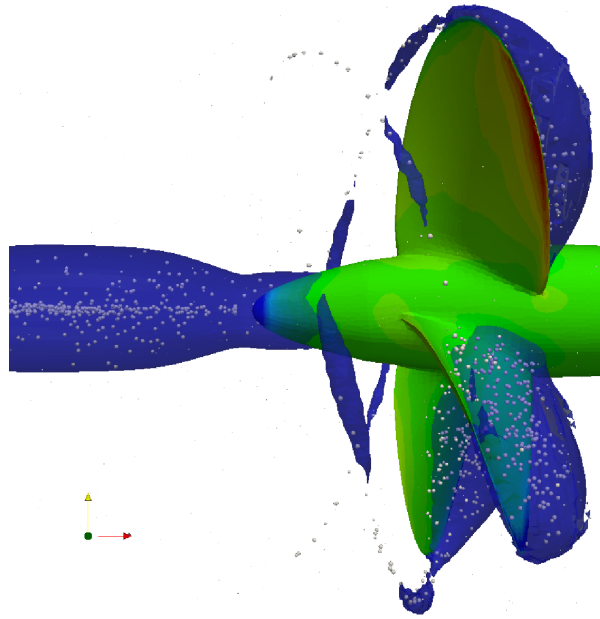


Abbildung 6.61: Kavitationsblasenverteilung, Euler-Lagrange Kavitationsmodell, Berechnung mit Vorticity Confinement,  $\varepsilon = 1.0$

## 7 Zusammenfassung

Zielsetzung dieser Arbeit war die Weiterentwicklung von numerischen Algorithmen, welche der hohen Wirbeldissipation in der numerischen Lösung entgegenwirken um eine genauere Prognose speziell im Bereich der Spitzenwirbelkavitation von Propellern zu erreichen. Hierzu wurde zunächst anhand einfachster Problemstellungen die Wirbelausbreitung mit numerischen Verfahren nach aktuellem Stand der Wissenschaft untersucht. Aufgrund der ungenügenden Abbildung von Wirbelstrukturen ist hier zwingend Handlungsbedarf erforderlich, insbesondere wenn zu der Wirbelabbildung in einphasigen Strömungssimulationen die speziell in der Propellerauslegung zumeist unerwünschte Kavitation anhand von Berechnungen zweiphasiger Strömungen berücksichtigt und simuliert werden muss. Der Fokus liegt in dieser Arbeit auf der Abbildung der Spitzenwirbelkavitation.

Zur Aufrechterhaltung von Wirbeln kann im Allgemeinen zum einen eine erhöhte Netzauflösung gewählt werden. Dieses führt jedoch zu deutlich erhöhten Rechenzeiten. Eine weitere Möglichkeit ist das Einbringen antidissipativer Terme in die numerische Lösung. Dieses Einbringen antidissipativer Terme muss jedoch so gesteuert werden, daß nur gezielt in ausgewählten Bereichen in die numerische Lösung eingegriffen wird. Hierzu gibt es in der Literatur bereits unterschiedliche Ansätze, welche jedoch in der Praxis aus eigenen Erfahrungen nicht zu dem gewünschten Erfolg bzw. zu einer gewünschten Stabilität in der numerischen Lösung speziell im Bereich der Propellerumströmung geführt haben. Der Hauptgrund ist bei allen Formulierungen der unzureichende Ausschluß der Grenzschicht welcher bei grenzschichtbehafteten Strömungsproblemen zu einer vernachlässigbar geringen Beeinflussung der Strömung führt. Für reale Problemstellungen sind diese Verfahren nur sehr eingeschränkt nutzbar. Weiterhin handelte es sich bei den frühen Formulierungen um einen dimensionsbehafteten Parameter  $\varepsilon$ .

Aufgrund der Erfahrungen mit bereits vorhandenen Formulierungen wurde eine Möglichkeit des gesteuerten Eingriffs in die numerische Lösung geschaffen, welche die direkte Auswahl vorhandener Wirbelstrukturen ermöglicht. Dieses erfordert natürlich eine gewisse Kenntnis der aktuellen Umströmungssituation. Diese wird jedoch nicht nur für diese Art des Eingriffs in die numerische Lösung gefordert, sondern ist stets bei der Bewertung numerischer Lösungen notwendig und stellt somit keine erhöhten Anforderungen an den Nutzer.

Das Verfahren wurde zunächst an einfachsten Wirbelströmungen auf die Eignung untersucht und im Anschluss an realen Strömungsproblemen angewendet für welche experimentelle Er-

gebnisse vorliegen. Es hat gute Übereinstimmungen gezeigt zu vergleichbaren Berechnungen mit fein aufgelösten Netzen aber auch zu den vorliegenden Versuchsergebnissen. Eine ausreichend genaue Abbildung und Verfolgung von Spitzenwirbeln ist somit auch auf grob aufgelösten Netzen möglich. Zur Simulation von Kavitationseffekten ist natürlich eine besonders hohe Netzauflösung gefordert. Jedoch kann auch hier für frühe Abschätzungen der Wirbelausbreitung dieses Verfahren zum Einsatz kommen. Dieses wurde z.B. am untersuchten Tragflügel und auch am Propeller gezeigt.

Weiterer Handlungsbedarf besteht in der Abschätzung der Stärke des einzubringenden wirbelerhaltenden Terms. Die Einführung eines variablen Faktors, welcher anhand der Wirbeltransportgleichung ermittelt werden könnte und die Richtung der Durchströmung durch die einzelnen Zellen berücksichtigt, sollte weitergehend untersucht werden. Ebenso ist eine Anpassung des einzubringenden Kraftterms in Umfangsrichtung zu überdenken, um eine exaktere Abbildung der Rotation zu gewährleisten. Zudem sollte die Findung des für die Problemstellung günstigen Parameters  $\varepsilon$  automatisch erfolgen. Die automatische Ermittlung könnte über die Einbindung der Wirbeltransportgleichung in die numerische Lösung ermöglicht werden. Mit den bisherigen Verfahren können jedoch bereits gute Ergebnisse und Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen erzielt werden.

## Literatur

- [1] ABDEL-MAKSoud, M. :  
Numerical and Experimental Study of Cavitation Behaviour of a Propeller.  
In: *Jahrbuch STG 2003 Schiffbautechnische Gesellschaft*, 2003
- [2] BALDWIN, B. S. ; LOMAX, H. :  
Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Flows.  
In: *AIAA Paper 78-257* (1978)
- [3] BANKS, D. C. ; SINGER, B. A.:  
A Predictor-Corrector Technique for Visualizing Unsteady Flow.  
In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 1 (1995), S. 151–163
- [4] BARK, G. ; FRIESCH, J. ; KUIPER, G. ; LIGTELIJN, J. T.:  
Cavitation Erosion on Ship Propellers and Rudders.  
In: *Proceedings of the 9th Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures, STG*, 2004
- [5] BUTSUNTORN, N. ; JAMESON, A. :  
Time Spectral Method for Rotorcraft Flow with Vorticity Confinement.  
In: *Proceedings of the 26th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 2008
- [6] BUTSUNTORN, N. ; JAMESON, A. :  
Time Spectral Method for Rotorcraft Flow with Vorticity Confinement.  
In: *Proceedings of the 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2008
- [7] CALCAGNO, G. ; FELICE, F. D. ; FELLI, M. ; FRANCHI, S. ; PEREIRA, F. ; SALVATORE, F. :  
The INSEAN E779a Propeller Test Case: a Database For CFD Validation.  
In: *Proceedings of the 23th Symposium on Naval Hydrodynamics*, 2000
- [8] CHONG, M. S. ; PERRY, A. E. ; CANTWELL, B.-J. :  
A general classification of three-dimensional flow fields.  
In: *Physics of Fluids A2* (1990), S. 765–777
- [9] COUTIER-DELGOSHA, O. ; REBOUD, J. L. ; FORTES-PATELLA, R. :  
Evaluation of the Turbulence Model Influence on the Numerical Simulations of Unsteady Cavitation.  
In: *Journal of Fluids Engineering* 125 (2003), S. 38–45
- [10] DALLMANN, U. :  
Topological structures of three-dimensional flow separation.  
In: *DFVLR-IB Report 221-82 A07* (1983)
- [11] DIETZ, W. ; FAN, M. ; STEINHOFF, J. ; WENREN, Y. :  
Application of vorticity confinement to the prediction of the flow over complex bodies.

- In: *Proceedings of the AIAA CFD conference*, 2001
- [12] FEDKIW, R. ; STAM, J. ; JENSEN, H. W.:  
Visual simulation of smoke.  
In: *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 2001
- [13] FERZIGER, J. H. ; PERIC, M. :  
*Numerische Strömungsmechanik*.  
Springer Verlag, 2008
- [14] FRUMAN, D. ; DUGUE, C. ; PAUCHET, A. ; CERRUTI, P. ; BRIANCON-MARJOLET, L. :  
Tip Vortex Roll-Up and Cavitation.  
In: *Proceedings of the 19th Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1992, S. 85–103
- [15] GERMANO, M. ; PIOMELLI, U. ; MOIN, P. ; CABOT, W. H.:  
A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model.  
In: *Physics of Fluids A* (1991)
- [16] HACHMANN, T. ; LANTERMANN, U. ; ABDEL-MAKSoud, M. ; HÄNEL, D. :  
Vorticity Confinement Methods for Cavitating Flows.  
In: *Proceedings of the 7th International Symposium on Cavitation CAV2009*, 2009, S. 930–937
- [17] HANSEN, C. D. ; JOHNSON, C. R.:  
*The Visualization Handbook*.  
Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
- [18] HARLOW, F. H. ; WELSH, J. E.:  
Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow with free surface.  
In: *Physics of Fluids* 8 (1981), S. 2182–2189
- [19] HIRT, C. W. ; NICHOLS, B. D.:  
Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries.  
In: *Journal of Computational Physics* 39 (1981), S. 201–221
- [20] HUNT, J. C. R. ; WRAY, A. A. ; MOIN, P. :  
Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows.  
In: *Center for Turbulence Research Report CTR-S88* (1988), S. 193–208
- [21] JAKHOT, V. ; ORSZAG, S. A. ; THANGAM, S. ; GATSKI, T. B. ; SPEZIALE, C. G.:  
Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique.  
In: *Physics of Fluids A* 4 (1992), Nr. 7, S. 1510–1520
- [22] JEONG, J. ; HUSSAIN, F. :  
On the identification of a vortex.  
In: *Journal of Fluid Mechanics* 285 (1995), S. 69–94
- [23] KATO, M. ; LAUNDER, B. E.:

- The Modeling of Turbulent Flow Around Stationary and Vibrating Square Cylinders.  
In: *Proceedings of the 9th Symposium on Turbulent Shear Flows*, 1993, S. 10.4.1–10.4.6
- [24] KICKELBICK, G. :  
*Chemie für Ingenieure*.  
Addison-Wesley Verlag, 2008
- [25] LAUNDER, B. E. ; SHARMA, B. I.:  
Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc.  
In: *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1974, S. 131–138
- [26] LAUNDER, B. E. ; SPALDING, D. B.:  
*Lectures in Mathematical Models of Turbulence*.  
Academic Press, 1972
- [27] LEVY, Y. ; DEGANI, D. ; SEGNER, A. :  
Graphical visualization of vortical flows by means of helicity.  
In: *AIAA J.*, 28(8) (1990), S. 1347–1352
- [28] LI, D.-Q. ; GREKULA, M. ; LINDELL, P. :  
A modified SST  $k$ - $\omega$  Turbulence-Model to Predict the Steady and Unsteady Sheet Cavitation on 2D and 3D Hydrofoils.  
In: *Proceedings of the 7th International Symposium on Cavitation CAV2009*, 2009
- [29] LUGT, H. J.:  
Vortex flow in nature and technology.  
(1972). –  
New York, Wiley
- [30] LÖHNER, R. ; YANG, C. ; ROGER, R. :  
Tracking vortices over large distance using vorticity confinement.  
In: *Proceedings of the 24th Symposium on Naval Hydrodynamics*, 2002
- [31] MENTER, F. R.:  
Zonal Two Equation  $k$ - $\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows.  
In: *AIAA Paper 93-2906* (1993)
- [32] MENTER, F. R.:  
Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications.  
In: *AIAA Journal* Vol. 32, No. 8 (1994), S. 1598–1605
- [33] MURAYAMA, M. ; NAKAHASHI, K. ; OBAYASHI, S. :  
Numerical simulation of vortical flows using vorticity confinement coupled with unstructured grid.  
In: *Proceedings of the AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2001
- [34] MUZAFERIJA, S. ; PERIC, M. ; SAMES, P. ; SCHELIN, T. :



- A two-fluid Navier-Stokes solver to simulate water entry.  
In: *Proceedings of the 22nd Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1998
- [35] OSHER, S. ; SETHIAN, J. A.:  
Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations.  
In: *Journal of Computational Physics* 79 (1988), S. 12–49
- [36] PEMBERTON, R. J. ; TURNOCK, S. R. ; DODD, T. J. ; ROGERS, E. :  
A novel method for identifying vortical structures.  
In: *Journal of Fluids and Structures* 16(8) (2002), S. 1051–1057
- [37] ROBINSON, M. A.:  
Application of vorticity confinement to inviscid missile force and moment prediction.  
In: *Proceedings of the 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2004
- [38] SAFFMANN, P. G.:  
A Model for Inhomogeneous Turbulent Flow.  
In: *Proceedings of the Royal Society of London* Bd. 317, 1970 (A: Mathematical and Physical Sciences 1530), S. 417–433
- [39] SAUER, J. :  
*Instationaer kavitierende Stroemungen - Ein neues Modell, basierend auf Front Capturing (VoF) und Blasendynamik*, Universitaet Karlsruhe (TH), Diss., 2000
- [40] SCHÄFER, M. :  
*Numerik im Maschinenbau*.  
Springer Verlag, 1999
- [41] SIGLOCH, H. :  
*Strömungsmaschinen, Grundlagen und Anwendungen*.  
Carl Hanser Verlag, 2006
- [42] SINGHAL, A. K. ; LI, H. Y. ; ATHAVALE, M. M. ; MIANG, Y. :  
Mathematical Basis and Validation of the Full Cavitation Model.  
In: *ASME Journal of Fluids Engineering* 124 (2002), Nr. 3, S. 617–624
- [43] SINGHAL, A. K. ; VAIDYA, N. ; LEONARD, A. D.:  
Multi-Dimensional Simulation of Cavitating Flows Using a PDF Model for Phase Change.  
In: *ASME FED Meeting*, 1997
- [44] SMAGORINSKY, J. :  
General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic equations.  
In: *Weather Rev* (1963), Nr. 91, S. 99–164
- [45] SPALART, P. R. ; ALLMARAS, S. R.:  
A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows.

- In: *AIAA Paper 92-439* (1992)
- [46] SPALDING, D. B.:  
A novel finite-difference formulation for different expressions involving both first and second derivatives.  
In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4 (1972), S. 551–559
- [47] STEINHOFF, J. ; UPPERHILL, D. :  
Modification of the Euler equations for vorticity confinement: Application to the computation of interacting vortex rings.  
In: *Physics of Fluids* 6 (1994)
- [48] TRUCKENBRODT, E. :  
*Fluidmechanik Band 2, Elementare Strömungsvorgänge dichteänderlicher Fluide sowie Potential- und Grenzschichtströmungen.*  
Springer Verlag, 1999
- [49] U. C. GOLDBERG, S. V. R.:  
A Pointwise Version of Baldwin-Barth Turbulence Model.  
In: *Computational Fluid Dynamics* 1 (1993), S. 321–338
- [50] UBBINK, O. ; ISSA, R. I.:  
Method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes.  
In: *Journal of Computational Physics* 153 (1999), S. 26–50
- [51] VAHL DAVIS, G. de ; MALLINSON, G. D.:  
False diffusion in numerical fluid mechanics, Technical Report 1972/FMT/1 / University of New South Wales, School of Mechanical and Industrial Engineering.  
1972. –  
Forschungsbericht
- [52] VOLLMERS, H. ; KREPLIN, H.-P. ; MEIER, H. U.:  
Separation and vorticaltype flow around a prolate spheroid – Evaluation of relevant parameters.  
In: *Proceedings of the AGARD Symposium on Aerodynamics of Vortical Type Flows in Three Dimensions* Bd. AGARDCP-342, 1983, S. 14–1–14–14
- [53] WANG, C. M. ; STEINHOFF, J. ; WENREN, Y. :  
Numerical Vorticity Confinement for Vortex-Solid Body Interaction Problems.  
In: *AIAA Journal* (1995), Nr. 33, S. 1447–1453
- [54] WENREN, Y. ; FAN, M. ; DIETZ, W. ; HU, G. ; BRAUN, C. ; STEINHOFF, J. ; GROSSMANN, B. :  
Efficient eulerian computations of the realistic rotorcraft flows using vorticity confinement.  
In: *Proceedings of the 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 2001

- [55] WILCOX, D. C.:  
*Turbulence Modelling for CFD.*  
DCW Industries, 1994
- [56] ZWART, P. J. ; GERBER, A. G. ; BELAMRI, T. :  
A Two-Phase Flow Model for Predicting Cavitation Dynamics.  
In: *Proceedings of the ICMF 2004 International Conference on Multiphase Flows*, 2004

## A

### A.1 Eulersche Winkel

Eulersche Winkel dienen der Beschreibung von Objekten im dreidimensionalen Raum zueinander. Mit Hilfe der Eulerschen Winkel lassen sich Koordinaten unterschiedlicher kartesischer Koordinatensysteme transformieren. Um eine Rotation darzustellen, werden drei Eulersche Winkel und deren zugehörige Rotationsachse benötigt. Je nach Reihenfolge und Auswahl der Rotationsachsen entstehen vollständig gleichwertige Beschreibungen der Rotationen. Im folgenden wird nur die verwendete Rotationsdarstellung nach der XYZ-Konvention beschrieben. Diese Konvention ist auch aus der Flugzeugtechnik unter Roll-Pitch-Yaw- (Roll-Nick-Gier-) Darstellung bekannt. Bei dieser Darstellung finden die Rotationen jeweils um die raumfesten Koordinaten des Koordinatensystems statt.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$\alpha$  dreht hierbei die Koordinaten um die x-Achse des Ausgangskordinatensystems,  $\beta$  um die y-Achse des Ausgangskordinatensystems und  $\gamma$  um die z-Achse des Ausgangskordinatensystems. Da bei dieser Form der Rotationsdarstellung Singularitäten auftreten für  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ , müssen zwei Sonderfälle der Rotationsmatrix für  $\beta = \frac{\pi}{2}$  und  $\beta = -\frac{\pi}{2}$  angegeben werden mit

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin(\gamma - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) \\ 0 & \cos(\gamma - \alpha) & -\sin(\gamma - \alpha) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

für  $\beta = +\frac{\pi}{2}$  und

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin(\gamma + \alpha) & -\cos(\gamma + \alpha) \\ 0 & \cos(\gamma + \alpha) & -\sin(\gamma + \alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

für  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ . Diese

Der Lebenslauf ist in der Online-Version aus Gründen des Datenschutzes nicht enthalten.